교육학석사학위논문

실행식 기반 수학적 창의성 교육 연구

2018년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

조 아 라

실행식 기반 수학적 창의성 교육 연구

지도교수 조 한 혁

이 논문을 교육학석사학위논문으로 제출함

2018년 06월

서울대학교 대학원

수학교육과

조 아 라

조아라의 석사학위논문을 인준함

2018년 07월

위 원 장	이 경 화	(인)
부 위 원 장	최 영 기	(인)
위 원	조 한 혁	(인)

국 문 초 록

기존의 지식 기반 교육에서 교육과 삶의 총체성을 더욱 잘 설명할 수 있는 역량 중심 교육으로 학교 교육의 방향이 전환되고 있다. 다양한 역량 중에서도 2015 개정 교육과정의 총론과 수학과 교육과정 고시문서를 살펴보면 공통적으로 창의성을 언급하고 있으며, 창의성은 현대와 미래 사회에서 갖추어야 할 역량의 한 부분으로서 인식되고 있다. 본고에서는 지난 몇 차례의 개정에서 수학과 교육과정이 공통적으로 강조해온 수학적 창의성에 대해 논의한다. 수학적 창의성과 관련된 여러 연구를 기반으로, 본고에서는 수학화 과정에서 수준 상승을 발생시키기 위해 수학적 창의성이 필요하다는 논지로부터 출발하여, 이를 위한 학습 환경으로서 실행식을 제시한다.

따라서 실행식과 그와 관련된 수학적 의미, 수학적 창의성, 수학화, 그리고 본고에서 취하고자 하는 교수-학습 설계 방법인 e-PBL의 중심인 구성주의에 대해 살펴보고, 이를 유기적으로 연결하여 연구의 당위성과 방법론을 마련하였다. 이후 실행식 기반 학습 환경에 적합한 교수-학습 설계 방법을 제시하고, 개발된 설계 방법을 직접 적용해보기 위해 ‘대칭성을 활용한 다리 만들기’를 문제로 삼아 학습자의 실행식 데이터를 비롯한 산출물을 분석하였다. 특히, 수학적 창의성과 실행식을 모두 반영한 분석 기준을 설정하기 위해, 전문가 3인의 견해를 토대로 결과 분석을 진행하였다.

이와 같은 분석에서 더 나아가, 창의적인 결과물은 창의적인 사고 과정을 수반한다는 논지에 입각해 학습자의 사고 과정을 분석하기 위해 학습자가 최종 제출한 실행식과 이전 과정에 대한 과정 분석을 실시하였다. 이를 통해, 학습자가 수학적 의미를 추구하는 과정 속에서 수학적 창의성이 발현되는 현상을 자연스럽게 포착하였다. 즉, 수학적 결과물들

로 가득 찬 최종 산출물을 학습자가 어떠한 맥락들을 엮어 형성했는지와 그 과정을 중점적으로 논의하고자 하였다.

주요어: 실행식, 수학적 창의성, 수학화, 수학적 의미, 수학적 사고 과정, 구성주의, e-PBL, 과정 분석, 결과 분석.

학번: 2016-21571

목 차

표 목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 서론

지식 기반 교육에서 역량 중심 교육으로 학교 교육의 방향이 전환되면서, 교육과 삶의 총체성을 더욱 잘 설명할 수 있는 역량 중심 교육에 대한 논의가 활발하게 대두되고 있다. 이와 같은 담론은 OECD가 미래 사회에서 요구되는 핵심 역량을 규명하고, 이를 발전시킬 수 있는 교육에 대한 연구를 진행하면서 관심이 고조되었다. ‘Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundation(DeSeCo)’이라는 프로젝트는 역량과 관련된 이론적 기초나 정의와 이에 대한 근거를 사회적 환경과 관련지어 분석하고자 하였으며, 국제적인 맥락에서 역량 평가를 위한 추후의 개발 작업에 대한 지침을 제공하는 것을 목표로 한다(OECD, 2003). 이와 같은 역량 중심 교육은 DeSeCo 사업의 2.0버전으로 1주기와 2주기 사업으로 나누어지며, 1주기 사업의 향후 계획 중 수학과 교육과정 심층 분석이 포함되어 있다(한국교육개발원, 2016). 연구 계획에 포함된 교과가 수학과 체육인 점을 고려했을 때, 수학 교과에 대한 심층적 논의의 진행은 교과의 위상과 교과를 기반으로 한 역량 교육의 중요성을 설명한다.

역량 중심 교육은 국제 사회의 변화에 대한 심도 있는 이해를 기반으로 미래 핵심 역량과 그 개념을 논의하고 있으므로, 우리나라의 교육과정 설계 및 세부 내용 체계에도 유의미한 영향을 미칠 수밖에 없다. 《2015 초·중등학교 교육과정 총론》의 ‘교육과정 구성의 중점’영역에 이와 같은 논의가 진행되었음을 살펴볼 수 있다. 총론에서는 다음과 같은 내용을 교육과정 구성의 중점으로 제시하고 있다.

> 이 교육과정은 우리나라 교육과정이 추구해 온 교육 이념과 인간상을 바탕으로, **미래 사회가 요구하는 핵심역량을 함양**하여 바른 인성을 갖

춘 **창의융합형 인재**를 양성하는 데에 중점을 둔다(교육부, 2015a).[1)]

교육과정 총론의 경우 학교 급이나 교과목의 차이 없이, 국가 주도의 교육의 이념과 목적, 발전 방향을 거시적으로 드러내고 있다. 앞서 인용된 내용을 중심으로, 추후 등장하는 학교 급별 교육 목표 또한 '상상력', '창의적 사고력' 등의 인지적 발전 요소가 아닌 실천적인 양태를 서술하고 있는 것 또한 살펴볼 수 있다.

앞서 살펴본 핵심 역량은 인지적인 지식이나 기술뿐만 아니라, 태도나 가치 등의 창의성과 다른 심리적 특성이 중요하다고 강조한다(OECD, 2005). 핵심 역량은 일반 역량이라고도 불리며, 창의성이나 비판적 사고력 등의 교과를 아우르는 논의이다. 창의성을 비롯한 일반 역량은 교과 학습을 통해 길러지며 교과 특수 역량을 총괄하기 때문에, 두 역량은 사호 보완적인 관계를 지니고 있다(백남진, 온정덕, 2016). 수학 교과 또한 교과의 성격에 대해 역량을 중심으로 논의하고 있는 점을 우리나라의 교육과정 고시문서에서 찾아볼 수 있다. 고시 문서에서는 창의・융합, 문제 해결, 추론 등의 여섯 가지의 수학 교과 역량을 제시하고 있으며, 이와 같은 수학 교과 역량 함양을 기반으로 '복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고 개인의 잠재력과 재능을 발현할 수 있다'라고 설명한다(교육부, 2015b). 이와 같은 논의를 통해 역량 중심 교육이라는 세계적 기조가 우리나라 교육과정의 양태를 변화시켰음을 확인할 수 있다.

그 중에서 창의성은 현대와 미래 사회에 갖추어야 할 역량의 한 부분으로 인식되고 있으며, 교육의 목적이자 목표로서 활발히 언급되고 있다. NCTM(2000)에서는 현 시대에 요구되는 수학 학습의 요소로서 수학적 창의성을 들기도 하였으며, 우리나라의 수학과 교육과정에서도 창의성과 관련된 논의를 찾아볼 수 있다. 《2015 개정 수학과 교육과정》과 지난 몇 차례 간 개정된 수학과 교육과정은 공통적으로 수학적 창의성에

---

1) 강조 표시는 연구자가 하였다.

대해 논의하고 있으며, 창의성 함양을 또 다른 수학 교육의 중요 목표 중 하나로 간주하고 있다. 수학적 창의성은 수학적 개념의 이해와 관련되어 문제 상황의 이해 그리고 해결 방법과 밀접한 관련이 있다. 문제 해결을 위한 전략 수립과 사고 과정은 단순한 사고 능력보다 고차적 사고 능력을 기반으로 한다. 고차적 사고 능력은 단순히 반복하고 사용해 전달하는 기본적 차원의 사고 능력과는 다르게, 주어진 정보를 인지하여 자신이 원하는 형태로 변형해 사고 과정에 반영할 수 있는 능력을 지칭한다. 즉, 주어진 정보를 수동적인 방식으로 수용하는 것에 머무르지 않으며, 사고 주체의 능동적인 조작을 필요로 한다. 비판적 사고는 이와 같은 고차적 사고와 그 과정 속에서 발생하는 능동적 반성을 포함하고 있으며, 더욱 훌륭하고 적절한 판단을 위해서는 자신이 고안할 수 있는 최선의 논증을 위해 다양한 관점에서 상황을 해석하고 적절한 정보를 취사해야 할 필요성을 요구한다. 즉, 창의적 사고와 무관할 수 없다(서민규, 2012). 따라서 문제 해결을 위한 고차적 사고 능력은 사고의 내용과 과정 모두를 대상화하고, 이를 문제 상황의 맥락과 관련짓는 능동적인 형태로서 작용한다. 즉, 최선의 판단을 위한 다각도의 판단과 상상력을 위해 창의성을 필요로 하게 된다.

창의성과 수학적 창의성은 다양한 맥락에서 이해되기 때문에 담론에 따라 그 정의와 요소에 대한 상이한 해석이 존재하며, 하나의 합의점에 도달하지 못하고 있다. 현재 논의되는 일반적인 창의성의 개념은 Guilford(1967)와 Torrence(1972)의 관점을 기반으로 발전하였으며, 유창성, 유연성, 융통성, 독창성 등의 몇 가지 하위 요인으로 구성되어 있다는 논의가 일반적이다. 그렇지만 이와 같은 일반 창의성의 논의를 수학적 창의성에 대입하는 것은 적절하지 못하다는 여러 선행연구가 있다(김부윤, 이지성, 2005; 조아라, 조한혁, 2017; 김판수, 2013). 공통적으로 이들은 창의성의 내용 요소만으로 수학적 창의성을 평가하는 것은 수학이라는 학문 본연의 특징을 반영할 수 없다는 주장을 지니고 있다. 창의성과 수학적 창의성과 관련된 여러 선행연구를 중심으로 이경화(2016)는

수학적 창의성을 ‘새롭고 유용한 수학적 지식이나 수학적 관점을 만들어내는 능력과 과정’이라는 최소한의 정의에 여러 다른 관점을 추가하여 논의하는 단계라고 설명하였다. 즉, 다양한 맥락에서 창의성의 개념을 이해할 수 있으며, 심리학적 관점의 창의성 논의를 수학적 창의성에 그대로 대입하는 것은 적절하지 못하며 수학 교육학적 변용이 더해진 관점이 요구된다고 할 수 있다. 학습자가 나름의 수학적 의미를 구현하고, 소박한 창조를 일구어나가는 사고 과정 중심의 논의가 수학적 창의성에 포함될 필요가 있다는 것이다.

특히, 현재 학교 수학 교육은 문제의 해결보다는 풀이에 중점을 맞춘, 정답이 있는 수업이 주를 이루어 창의성을 비롯한 고차적인 사고 능력을 실현하기 어려운 환경에 처해있다. 계통성이 짙은 구조의 수학 교과의 모학문을 고려했을 때, 정오를 추구하는 교육은 학습자가 스스로 논리적인 흐름이나 창조적인 생각을 구축하기 어렵게 한다. 일반적으로 다양한 모색은 종합적 이해라는 결과를 수반하는데, 이는 여러 관점의 생각이 고차원적이고 추상적인 지식을 통합적으로 아우르기 때문이다 (Roots-Berstain & Roots-Berstain, 2001). 이에 본고는 종합적인 사고와 지식의 구축을 추구하고 선수학습과 관련성이 낮은 수학적 창의성 함양 교육 방안을 제시하고자 한다. 특히 조아라와 조한혁(2017)의 지난 연구에서 더 나아가, 수학적 창의성을 발휘할 수 있는 실행식 기반의 교수-학습 환경을 제시하고 학습자가 어떻게 사고하며 수학적 지식이나 관점을 구성하는지 분석하고자 한다. 실행식은 몇 가지의 문자로 구성된 표현 체계로 대수 문자와는 다소 차이가 있지만, 산술에서 대수로의 이행기에 학습해야 할 수학적 문자의 특성을 상당 부분 포함하고 있어 초기 대수적 개념을 흡수하기에 적절하다고 사료된다.

요약하자면 앞서 살펴본 역량 중심 교육, 특히 창의성과 수학적 창의성에 대한 여러 가지 연구를 포함하여, 학습자들이 어떻게 수학적 창의성을 최대한 발현할 수 있을지 선행연구를 기반으로 적절한 교수-학습 설계 방안을 도출할 것이다. 또한 설계된 환경에서 학습자들이 어떻게

수학적 창조를 이루어나가는지를 살펴보기 위해, 실행식 작성 과정을 분석하여 학습자의 사고 변화와 수학화 과정을 논의하고자 한다. 본고는 이와 같은 논의를 바탕으로 다음과 같은 연구 문제를 제시한다.

1. 실행식과 수학적 창의성 교육은 어떠한 관련성이 있는가?
2. 일반 창의성은 다른 수학적 창의성의 특징은 무엇이 있는가?
3. 수학적 창의성을 증진시킬 수 있는 교수-학습 설계는 어떻게 이루어져야 하는가?
4. 학습자들은 어떻게 창의적인 수학적 지식이나 관점을 형성하는가?

이와 같은 논의를 이어가기 위해, 선행연구를 바탕으로 이론적 관점을 명확히 하고, 추후 수학적 창의성 함양을 위한 구체적인 교수-설계 방법과 이를 적용한 교육에 대해 논의하고자 한다. 또한, 실제 사례를 중심으로 연구 결과를 분석하여, 수학적 창의성 교육의 함의를 담아내고자 한다.

Ⅱ. 실행식

1. 문자와 대수[2)]

수학에서 대수에서 문자의 사용은 매우 강조되는데, 이는 대수의 시작이 ‘산술’에서 ‘상징’으로 전환하는 것에 있기 때문이다. 그러나 압축된 의미의 상징을 이해하고 이를 토대로 한 수학을 학습하는 것은 학습자에게 어려움을 느끼게 한다(신만식, 김인수, 2004). 즉, 산술에서 대수로의 이행기에서 이전과는 다른 수학적 상징과 표현의 변화는 학습자가 수학에서 자유롭게 문자를 활용하는 것에 장애를 겪게 한다. 그러나 현재 우리나라의 교육과정에서는 대수적 기호를 형식적으로 대입하고 단순하게 조작하는 접근법을 활용하고 있다(김성준, 2003). 즉, 우리나라 공교육에서는 부진아 학습을 위한 엄밀한 별도의 방안이 마련되어 있지 않아, 초기적인 대수 학습이 이루어지는 중학교 수학 교과에서 인지적 불협화음을 느끼게 되면 다음 과정으로 넘어갈 수 없게 되어 있다. 이는 수학 교과가 계열성이 뚜렷한 체계적인 논리 구조의 모학문을 기반 하기 때문에 더욱 강력하게 작용한다고도 볼 수 있다. 아래의 논의는 《2015 개정 수학과 교육과정》에서 ‘문자와 식’영역을 소개한 것이다.

> 문자는 수량 관계를 명확하고 간결하게 표현하는 **수학적 언어**이다. 문자를 통해 수량 사이의 관계를 **일반화**함으로써 **산술에서 대수로 이행**하며, 수에 대한 사칙연산과 소인수분해는 다항식으로 확장되어 적용된다. 또한 방정식과 부등식은 양 사이의 관계를 나타내며, 적절한 절차를 따라 이를 만족시키는 해를 구할 수 있다. 문자는 **수학적 의사소통**을 원활히

2) 본 절의 하위 영역은 조아라와 조한혁(2017)의 내용을 수정 및 보완한 것이다. 조아라와 조한혁(2017)은 실행식 기반 쌓기나무 학습을 세 가지 관점에서 교수-학습하고 평가할 수 있는 방법을 마련하였다.

할 수 있도록 도와주고, 문자를 이용한 방정식과 부등식은 **여러 가지 문제를 해결하는 중요한 도구**가 된다.[3)]

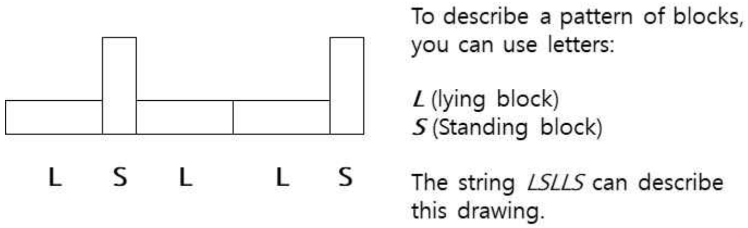
국가 주도의 교육과정 고시 문서에도, 문자를 ‘수학적 언어’로 명시하고 있으며, 문자 사용이 ‘산술에서 대수로의 이행’임을 분명하게 드러내고 있다. 또한 이와 같은 문자의 활용이 방정식과 부등식, 그리고 이를 기반으로 한 문제 해결에 영향을 미친다는 점을 기술하고 있다. 즉, 대수에서 문자의 이해는 학습자의 수학 발달 체계에서 중요한 역할을 담당하며, 문자 사용을 통해 학습자는 대수 영역에서의 범주를 점차적으로 확대하게 된다. 그러나 Küchemann(1981)에 따르면 수학 교과에서 사용되는 기호는 고도로 추상화된 표현으로 제공되기 때문에, 이전과 달리 구체성이 모호하여 학습자에게 혼란스러움을 발생시킨다. 또한, 다수의 학습자가 하나의 문자가 여러 가지의 값을 표현할 수 있다는 것 혹은 다른 문자가 하나의 값을 나타낼 수 있다는 것을 수용하지 못해 이해의 어려움을 겪기도 한다(Wagner, 1981). 이와 같은 논의에 따르면, 수학적 표현을 위한 문자 본연의 의미를 이해하고 해석하며, 이를 활용하는 역량은 상당히 높은 차원의 사고 방법임을 유추할 수 있다. 문자의 개념을 잘 이해하지 못하는 이유 중 하나는 이행기가 등장하기 이전의 초등학교 때부터, 학습자들이 직접 다루는 문자들이 제한적이기 때문이다.

학교 수학에서 대수 영역은 일상 언어 중심의 기호를 사용한 산술에서 상징을 사용하는 대수로 조금씩 형식화된다. 그러나 산술에서 대수로의 전이 과정에서 수학적 상징의 의미 변화는 외국어를 학습하는 것과 같은 인지적 불협화음을 초래하여 대수 발달의 어려움을 겪게 된다(김선희, 이종희, 2003). 앞서 살펴본 바와 같이, 학습의 초기에서 인지적 불협화음을 겪게 되면 이를 활용한 추후 수학 학습과 이를 근간으로 하는 발달에 지속적으로 영향을 미치게 된다. 우정호(2007)는 기호적인 언어는 구체성이 약하기 때문에 여러 가지 문맥에 적용할 수는 있지만, 구체성이 떨어지는 표

3) 강조 표시는 연구자가 하였다.

현을 수학적 대상으로 간주하고 이를 조작하도록 하는 대수적 표현 체계는 학습자에게 어려움을 초래한다고 설명하였다. 따라서 대수적인 식을 처리의 '과정'이 아닌 하나의 수학적 '대상'으로 인식할 수 있을 때까지 이와 같은 조작은 갈등의 원인이 될 수 있으며, 조작적 개념으로부터 구조적 개념으로의 이행이 쉽지 않기 때문에 '이행기'가 필요하다고 주장하였다. 또한, 학습 과정에서는 대수적 변환이 상당히 분명한 것처럼 보이나 실제로 학습자가 변환을 적용할 때는 의미를 이해하는 것이 선행되어야 하므로 상당한 어려움을 초래한다고 설명하였다. 따라서 구체적인 이미지를 기반으로 인지적인 혼란을 해소할 수 있는 학습과 지도가 필요함을 피력하였다. 이는 학습자가 스스로 문자와 관련된 인지적 발달을 추구하고, 나름의 맥락을 구성할 수 있는 적절한 수준으로 구성된 교수-학습을 제공하는 것이 초기적인 대수 학습에 요구된다는 것과 맥을 함께 한다.

[그림 Ⅱ-1] ≪Mathematics in context≫의 규칙성과 패턴 학습[4)]

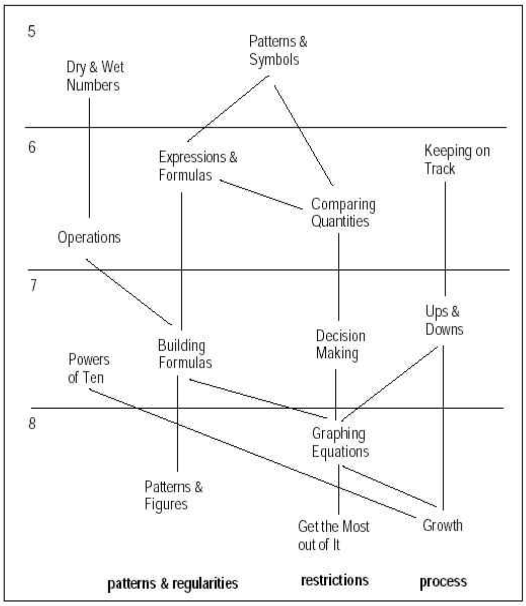


우리나라와 달리 전 세계 수학교육과정과 그 방향성에 지대한 영향을 미치고 있는 미국의 NCTM과 그 규준집을 살펴보면, 이와 같은 문자 도입의 '이행기'에 대한 필요성을 이미 교과서에 반영하고 있는 것을 확인할 수 있다. 1990년부터 미국 Wisconsin 대학과 네덜란드의 Freudental 연구소에서 공동으로 연구한 Mathematics in Context(MiC) 프로젝트에서도 대수 영역에 대한 논의를 살펴볼 수 있다. MiC 프로젝트는 5학년부터 8학

4) [그림 Ⅱ-1]의 내용은 ≪Mathematics in context≫의 한 부분인 Patterns and symbols에 등장하는 규칙성과 패턴 학습의 한 부분을 연구자가 재구성하였다.

년을 대상으로 대수를 비롯한 수학 교수-학습에 대한 논의를 진행하였는데, 이 중 대수 영역은 다음과 같은 특징을 지닌다. 학생들은 다양한 표현과 함께 관계를 기술하는 방법을 배우고, 이러한 표현들을 연결하는 방법을 배운다. 이에 대한 예시는 [그림 Ⅱ-1]과 같다. 앞서 살펴본 바와 같이, 대수는 문제 해결에 사용되며 학습자는 이를 위해 대수를 적절하게 활용하는 방법에 대해 생각한다. 따라서 문제 해결은 대수적 표현을 선택하고 판단하는 것까지를 포함한다. 즉, 대수는 문제를 해결하는 수단이며 그 자체의 구조나 기호가 목적은 아니다(van Reeuwijk, 1996; 김성준, 2003, 재인용). MiC에서는 대수적 문제 해결 이전에 문제를 표현하고 문제 내에 얽혀 있는 관계를 유기적으로 연결하는 것을 강조하고 있으며, 이를 토대로 기호를 다루는 것이 대수의 목적이 아님을 강조하고 있다. [그림 Ⅱ-2]는 위와 같은 대수 학습의 사고가 반영된 MiC 교과서의 대수 학습 흐름을 나타낸 것이다.

[그림 Ⅱ-2] MiC의 대수 학습 흐름도(김성준, 2003)

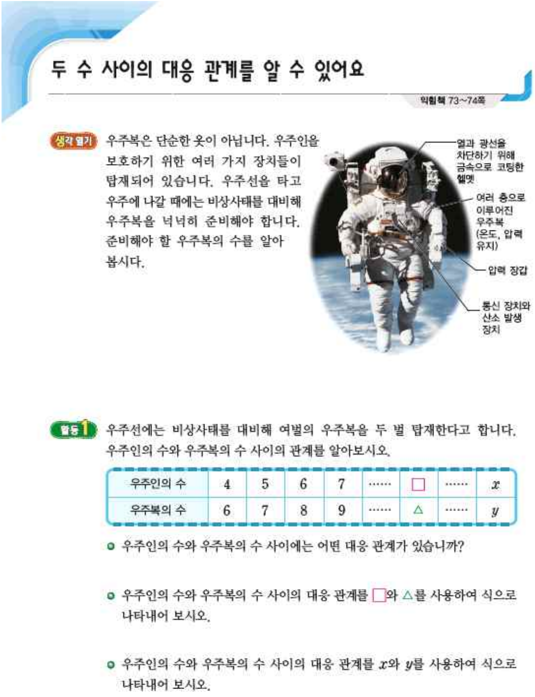


제시된 그림에서 '패턴과 규칙성' 은 수치적 패턴에서 규칙성을 발견하는 것을 포함하며, 5학년부터 규칙성과 패턴을 다루는 학습을 진행한 후에야 비형식적 언어로 학습이 이어진다. 즉, 형식화에 얽매이지 않고 대수적 관계와 이에 대한 맥락을 학습한 후, 중등 수준에 도달해야 앞서 학습한 내용을 비롯한 다양한 패턴들을 형식적인 문자를 사용하여 나타내는 것을 배우게 된다. 즉, 다양한 패턴을 통해 규칙을 발견하고 관계를 학습하는 과정이 초등 과정부터 중등 과정까지 비교적 유기적으로 연결된다(김성준, 2003). 이처럼, MiC 교과서에는 산술에서 대수로의 이행기에서 자연스럽게 생각을 연결할 수 있는 수단이 학습자가 쉽게 이해할 수 있도록 시각적인 도구를 활용하여 제시되어 있음을 확인할 수 있다. 물론, 우리나라의 경우 초등 수학 교과의 '규칙성' 영역에서 함수 개념의 기초를 학습하기 위해 대응 관계나 규칙 찾기를 활용하기는 하지만, 앞서 살펴본 초기 대수 학습에서 필요로 했던 대상의 인식과 개념의 이행이 자연스럽게 연결되고 있다고 보기 어렵다. 형식적인 단계로 넘어가는 절차가 단계적으로 마련되어 있지 않기 때문이다. 즉, 인지적 어려움을 최소화한 상태에서, 교육과정 고시 문서에서 언급된 문자의 의미나 성질을 직접 적용해볼 수 있는 기회가 상대적으로 빈약하다.

앞서 살펴본 관련된 논의를 정리하자면, 산술-대수의 인지적 불협화음을 발생시키지 않고, 다양한 상징 속에서 문자의 내포된 여러 의미와 관계를 이끄는 교수-학습이 요구된다. 인지적 장애물로 인한 이해의 부족을 메우기 위해 규칙이나 절차를 암기하게 되면, 학습자가 이를 수학의 본질로 수용할 수 있다(우정호, 2007). 즉, 대수 기호화 단계는 학습자가 인지적 어려움 없이 수용할 수 있는 적정 수준, 그리고 산술과 자연스러운 연결에서 시작될 필요가 있다. 대수적 관계와 그 흐름이 공고히 자리 잡히지 않은 상태에서 기호화를 적용하는 것은 '문제 해결과 그 과정' 이라는 문자 사용의 본 목적을 이끌기에는 어려울 것으로 보인다. 따라서 형식적인 단계로의 급작스러운 변용보다, 비형식적인 수준으로라도 맥락에 내포되어있는 수학적 관계를 이해할 수 있는 통찰력이 요구되며, 이

와 관련된 지도 방안이 마련될 필요가 있다.

[그림 Ⅱ-3] 초등학교 6-2 교과서(교육부, 2015c).



두 수 사이의 대응 관계를 알 수 있어요

익힘책 73~74쪽

생각 열기 우주복은 단순한 옷이 아닙니다. 우주인을 보호하기 위한 여러 가지 장치들이 탑재되어 있습니다. 우주선을 타고 우주에 나갈 때에는 비상사태를 대비해 우주복을 넉넉히 준비해야 합니다. 준비해야 할 우주복의 수를 알아봅시다.

활동 1 우주선에는 비상사태를 대비해 여벌의 우주복을 두 벌 탑재한다고 합니다. 우주인의 수와 우주복의 수 사이의 관계를 알아보시오.

우주인의 수	4	5	6	7	……	□	……	x
우주복의 수	6	7	8	9	……	△	……	y

- 우주인의 수와 우주복의 수 사이에는 어떤 대응 관계가 있습니까?
- 우주인의 수와 우주복의 수 사이의 대응 관계를 □와 △를 사용하여 식으로 나타내어 보시오.
- 우주인의 수와 우주복의 수 사이의 대응 관계를 x와 y를 사용하여 식으로 나타내어 보시오.

2. 실행식[5]

2.1 쌓기나무

쌓기나무는 기하 교수-학습의 목표 중 하나인 공간 감각의 신장이 반영된 내용 영역으로, 제 7차 교육과정부터 도입되었다. 쌓기나무 영역은 학습자가 쌓기나무를 직접 다루는 경험을 통해 공간 감각을 신장시키고, 여러 영역과 관련성이 있는 입체도형의 학습을 통해 수학적 역량을 증진

5) 본 장의 하위 영역 또한 조아라와 조한혁(2017)의 내용을 발전시켜 논의하였다.

시키려는 의도가 담겨 있다. 《2015 개정 수학과 교육과정》에 근거하여 학년별 교육과정의 성취기준을 살펴보면 초등학교 1～2학년 군에서는 ‘쌓기나무를 이용하여 여러 가지 입체도형의 모양을 만들고, 그 모양에 대해 위치나 방향을 이용하여 말할 수 있다’를, 5～6학년 군에서는 ‘쌓기나무로 만든 입체도형을 보고 사용된 쌓기나무의 개수를 구할 수 있다’와 ‘쌓기나무로 만든 입체도형의 위, 앞, 옆에서 본 모양을 표현할 수 있고, 이러한 표현을 보고 입체도형의 모양을 추측할 수 있다’를 각각 제시하고 있다. 쌓기나무와 관련된 교육과정 고시문서의 내용 체계는 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> 교육과정 고시문서의 쌓기나무 관련 내용 체계

영역	핵심 개념	일반화된 지식	학년(군)별 내용 요소		
			1～2학년	3～4학년	5～6학년
도형	입체 도형	주변의 모양은 여러 가지 입체 도형으로 범주화되고, 각각의 입체도형은 고유한 성질을 갖는다.	입체도형의 모양		입체도형의 공간 감각

이에 따르면, 우리나라는 쌓기나무의 성질을 위주로 내용 체계가 구성이 되어 있는데, 그마저도 쌓기나무의 구조물이 어떻게 이루어져 있는지를 표현할 수 있는 적절한 방법이 드러나지 않아, 교수-학습에 어려움이 있다는 논의(장혜원, 강종표, 2009; 최경숙, 백석윤, 2004)가 있다. 특히, 장혜원(2015)은 쌓기나무 영역의 교수-학습이 현장에서 어려움을 겪고 있다는 사실과 함께, 교육과정에 드러난 성취기준이 교과서에서 구현되면서 공간 감각의 신장 이외에도 쌓기나무라는 내용 요소와 수학적 의사소통이라는 과정 요소가 결합된 점을 강조하였다. 더불어 이와 같은 현

실적 어려움에도 불구하고 쌓기나무와 관련된 연구들이 언어적 요소가 아닌 공간 감각에 맞추어져 있다는 점을 여러 연구(정영옥, 2004; 윤명숙, 2006; 장혜원, 강종표, 2009; 이보현, 2009)들을 기반으로 언급하고, 쌓기나무의 모양을 인식하고 설명하기 위해서는 설명의 다양성보다 효과적인 인식과 의사소통 방법이 요구된다고 피력하였다.

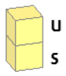
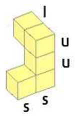
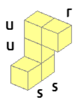
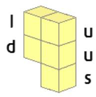
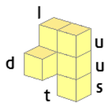
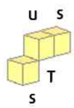
더불어, 정영옥(2017)은 우리나라와 핀란드, 네덜란드의 초등학교 교과서에서 입체도형과 관련된 영역을 비교한 결과, 핀란드와 네덜란드 교과서에는 실생활과 밀접한 공간 상황의 조감도나 평면도를 제시하고 여러 방향에서 바라본 모습과 위치를 찾는 현실적 맥락의 교육을 진행하고 있음을 도출하였다. 더불어 나선형으로 교육과정과 내용이 구성되어 여러 학년에 나누어 절차적으로 수준이 상승하는 타국과 달리, 우리나라의 쌓기나무 학습은 초등학교 2학년과 6학년의 영역에서만 이루어진다는 점을 지적하였다. 즉, 우리나라에서는 앞서 논의된 성취기준을 중심으로 일정 부분 떨어진 시기에 교수-학습이 이루어지고, 추후 교육과정에서 쌓기나무가 거의 논의되지 않기 때문에 학습자는 교육 내용의 연속성을 체감하기 어려울 뿐만 아니라, 교육과정의 단절이 발생함을 도출할 수 있다. 더불어 우리나라에서는 쌓기나무 구조물의 모양이나 개수 등을 중심으로 한 조작적 활동 이외에는 쌓기나무에서 학습할 수 있는 여타 다양한 수학적 측면을 다루지 못한다는 점에서 일정 부분 한계가 있음을 알 수 있다.

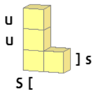
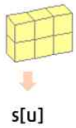
2.2 쌓기나무 실행식

쌓기나무가 지닌 이미지를 형상화하기 위해서는 적절한 의사소통 수단이 요구된다. 조한혁과 송민호(2014)는 쌓기나무의 이미지와 규칙을 형상화하기 위한 의사소통의 언어적 표현 체계로서 ‘실행식(Executable expression)’을 제시하였다. 실행식 학습 환경에서는 학습자가 명령어에 내포된 의미에 따라 직접 실행식을 작성하고, 식에 따른 쌓기나무 구조

물이 시각적으로 표현된 것을 확인한다. 이와 같이 학습자가 생각한 바를 명확하게 드러내고, 이를 타인에게 전달할 수 있는 표현 체계는 효과적인 교수-학습을 구성하는 역할을 할 것이다. 실행식의 기본 문자 체계는 아래의 <표 Ⅱ-2>와 같다. 실행식에서 사용되는 문자는 기본적으로 쌓기나무를 하나 만들며, 정해진 규칙에 따라 쌓기나무가 만들어지는 방향이 다르다. 더불어 ‘도돌이표’ 명령어를 활용하면 쌓기나무를 만드는 이동 경로를 축소할 수 있으며, ‘치환’ 명령어를 통해 반복되는 패턴이나 구조물을 하나의 문자, 즉 새로운 명령어로 간주하고 실행식을 압축적으로 제시할 수 있다.

<표 Ⅱ-2> 실행식 문자 표현 체계

명령어	설명	예시	
s	쌓기나무를 하나 만든다.		do s
u, U	쌓기나무를 위로 하나 만든다 (대문자는 방향만 바뀜).		do su
l, L	쌓기나무를 왼쪽으로 하나 만든다 (대문자는 방향만 바뀜).		do ssuul
r, R	쌓기나무를 오른쪽으로 하나 만든다 (대문자는 방향만 바뀜).		do ssuur
d, D	쌓기나무를 아래로 하나 만든다 (대문자는 방향만 바뀜).		do suuld
t	쌓기나무를 뒤로 하나 만든다.		do suuldt
T	투명한 쌓기나무를 하나 만든다.		do sTus

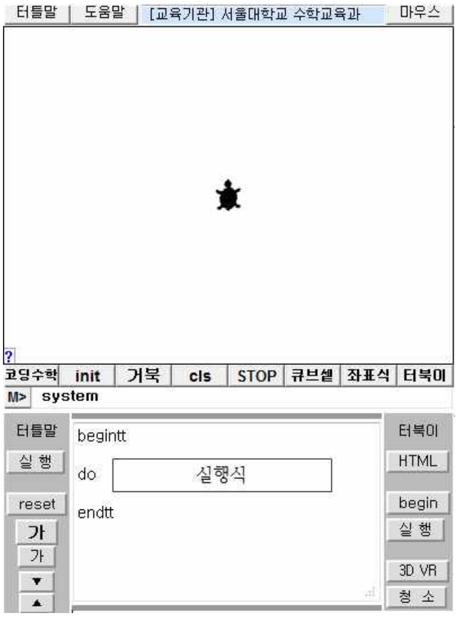
도돌이표 '[ ]'	명령어의 위치를 기억해 그 자리로 돌아간다.		do s[uu]s
치환	반복되는 구조물을 치환 문자를 사용하여 효과적으로 표현한다.		X= 's[u]' do 3X

2.3 실행식과 문자 활용

앞서 살펴본 명령어를 활용하여, 학습자는 쌓기나무를 구성하기 위해 나름의 실행식을 작성한다. 이때 사용되는 명령어는 쌓기나무 구조물을 만들기 위한 표현 체계로서, 실행식에서 사용되는 문자를 의미한다. 문자를 조합하여 실행식을 작성하는 체계는 [그림 Ⅱ-4]와 같다. 이와 같은 실행식의 특징에는 크게 두 가지가 있는데, 하나는 실행식이 학습자의 사고 과정을 드러낸다는 것이고, 다른 하나는 실행식을 작성하며 문자 조작의 경험을 할 수 있다는 것이다. 먼저, 학습자가 작성한 실행식은 문자의 조작과 이에 따른 사고 과정을 드러낸다. 실행식을 구성할 수 있는 명령어와 표현 체계는 무척 다양하며, 학습자는 자신의 수준에서 명령어에 의미를 부여하며 실행식을 구성하게 된다.

또한, 자신이 작성한 실행식이 의도하고자 하는 바와 일치했는지를 확인하기 위해, 다양한 시도를 반복하며 자신의 생각을 확인한다. Noss와 Hoyles(1996)는 표현 역량은 학습자로 하여금 의미를 구성하는 창을 열어주게 하며, 이를 통해 학습자의 생각으로 접근할 수 있다고 주장하였다. 실행식을 기반으로 한 표현 체계는 학습자가 작성한 사고 과정을 명시적으로 드러내어 교수자가 이를 유의미하게 분석할 수 있는 기회를 부여한다.

[그림 Ⅱ-4] 실행식 작성 체계



두 번째는 실행식을 작성하며 문자를 조작하는 경험을 한다는 것이다. 물론, 이 명령어와 실행식은 앞서 살펴본 대수적 차원의 문자와는 다소 차이가 있다. 실행식 명령어와 대수에서 사용되는 문자의 경우 수적인 의미를 포함하고 있다는 점은 공통적이다. 실행식에서 사용되는 문자는 명령어를 통해 쌓기나무 구조물을 즉각적으로 보여주는 것에 활용된다. 따라서 이를 수학에서 일반적으로 사용되는 대수 문자와 동일시하기는 어렵지만, 실행식에서 계수 활용, 치환 문자 활용 등은 대수 문자의 성질과 상당히 유사하기 때문에, 초기 대수 학습자가 실행식을 통해 문자를 스스로 다루고 이를 직접 확인해보는 경험을 충분히 꾀할 수 있다. 실행식 안에서 쓰이는 표현 체계와 교육과정과의 연관성은 아래의 <표 Ⅱ-3>과 같다.

〈표 Ⅱ-3〉 실행식 표현 체계의 특징과 문자와 식 교육과정[6)]

실행식의 특징	교육과정 내용 체계 및 교과서 예시
① 계수 sssss = 5s, sssssssuuuu = 5s4u	1 문자의 사용과 식의 계산 [9수02-01] 다양한 상황을 문자를 사용한 식으로 나타낼 수 있다. [9수02-03] 일차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다. $1000\times 1000\times \cdots \times 1000 = 1000x$ $(3x+4)+(2x-1)=3x+4+2x-1$ $=3x+2x+4-1=5x+3$
② 반복 명령 ssruulssruulssrul = 3{ssruul}	3 식의 계산 [9수02-08] '(단항식)×(다항식)', '(다항식)÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다. $2(3x-1)=2\times 3x+2\times(-1)$ $=6x-1$
③ 문자 치환 do sss[2d]Rsss[2d]Rsss[2d]R = X= '2s[2d]R' do sXsXsX	1 문자의 사용과 식의 계산 [9수02-02] 식의 값을 구할 수 있다. $a=-2$일 때, $3a+5=3\times(-2)+5=-1$

6) 표의 교육과정 내용체계는 모두 문자와 식 영역이다. 교육과정 고시 문서의 경우 15년 개정을 활용하였으나, 교과서 예시의 경우 09년 개정이 반영된 ≪(중학교) 수학 1≫ 교과서(교육부, 2015d)를 참고하였다.

제시된 표를 살펴보면, 실행식을 통해 문자와 식 영역에서 많은 부분과 맥을 함께 함을 이해할 수 있다. 그러나 실행식에서는 사칙연산이나 상수항 등이 반영되지 않아, 대수 문자에서 학습해야 하는 모든 요소를 반영하고 있지는 않다. 앞의 이야기를 이어가자면, 실행식의 문자와 대수 문자의 성질이 엄밀하게 동일하지는 않지만, 일정한 상황 속에서 다양한 문자를 통해 유의미한 표현을 구성하는 경험 정도는 체험할 수는 있다는 것이다. 실행식을 통해 문자 활용과 관련된 다양한 예시를 명시적으로 습득하고, 이전보다 문자와 친숙해지는 계기를 마련할 수 있다. 더불어 패턴 학습을 통해 초기 대수가 요구하는 인지적 맥락을 학습하는 것 또한 가능함을 살펴볼 수 있다. 이와 같은 맥락을 통해 실행식은 초기의 대수 학습자가 문자로부터의 거리감을 줄일 수 있는 도구가 될 수 있다. 더 나아가 다양한 쌓기나무 구조물을 접하며, 자신만의 독창적이고 다양한 실행식을 기반으로 문제를 해결하기 위해 고도의 사고 역량과 창의성을 활용하는 것으로 이어지게 된다.

Ⅲ. 수학적 창의성과 수학화

1. 창의성

국립국어원의 표준국어대사전에 의하면, 창의성의 사전적 정의는 ‘새로운 것을 생각해내는 특성’이다. 그러나 1950년 말부터 시작된 창의성의 개념 정의가 당대에 이르기까지 합의가 되지 않은 점을 고려하면, 단순히 새로운 것을 생각해내는 것만으로 창의성을 논의하기는 어렵다는 점을 유추할 수 있다. 본디 창의성은 소수의 인간이 보유한 타고난 기질로서 이해되었으나, Guilford가 APA 회장 취임사에서 창의성에 대한 지난 시기의 고정관념을 깨뜨리고 창의성은 모든 사람이 가지고 있는 능력이며 이를 기반으로 한 새로운 접근과 연구가 필요하다는 점을 피력한 후 구체적이고 과학적인 양상을 보이게 되었다. Guilford는 유창성, 융통성, 독창성을 기본 구성 요인으로 하여, 상상력 동원해 문제에 대한 다양하고 많은 해결책을 산출해 내는 확산적 사고를 핵심적인 요인이라 주장하였다(성은현, 박병기, 김선, 2003). 이와 같은 창의성에 대한 Guilford의 새로운 접근은 창의성과 관련된 활발한 연구와 기본적인 맥락을 형성하는 것에 중요한 역할을 하였다.

Torrance(1974)의 주장 또한 창의성 논의에 자주 등장한다. 그는 Guilford(1967)가 제시한 지능의 구조(SOI) 모형의 영향으로 확산적 사고 능력을 창의성의 주된 요소로 인식하고, 이와 관련하여 유창성(Fluency), 독창성(Originality), 유연성(Flexibility), 정교성(Elaboration)을 창의성의 하위 요소라고 하였다(이선영, 2014). 이를 기반으로 한 Torrance의 창의적 검사(TTCT)는 창의성을 측정하는 대표적인 검사로 사용되기도 하였다. 또 다른 창의성의 주요 논의로는 Cattell(1974)의 유동적 지능(Fluid intelligence)이 있는데, 이는 주어진 정보들 사이에서 새로운 관계를 도

출하는 능력을 말한다. Cattell은 유동적 지능을 창의성의 주요인으로, 결정적 능력(Crystallized ability), 유창성(Fluidity), 융통성(Flexibility)을 부차적 요인으로 제시하였다(성은현, 박병기, 김선, 2003). 위의 논의들은 모두 Guilford의 창의성 요인이 일부 포함된 경향을 보이며, 창의성 연구에서 Guilford가 미친 영향력을 이해할 수 있다. 김홍원, 김명숙, 송상헌(1996)은 창의성에 대한 다양한 정의들을 다음 <표 Ⅲ-1>과 같이 정의하기도 하였다.

<표 Ⅲ-1> 창의성의 다양한 정의

연구자	정의
Romey (1970)	기존의 아이디어, 사물, 기술, 접근 방법을 새로운 방식으로 결합하는 능력
Helpern (1984)	당면한 과제를 해결하기 위하여 과거의 경험과 지식을 새롭게 조직함으로써 가치 있는 아이디어를 생성해 내는 능력
Olsan (1988)	지적 호기심과 같은 개인의 특성으로부터 나타나는 내부의 힘으로, 자신에게 가치 있는 참신한 통찰을 산출해 내는 능력
Rodes (1990)	새로운 산출물을 생성해내는 능력
Sternberg (1994)	무엇인가 새롭고, 문제 상황에 적절한 것을 만들어 낼 수 있는 능력
Urban (1995)	주어진 문제나 감지된 문제로부터 통찰력을 동원하여 새롭고, 신기하고, 독창적인 산출물을 만들어내는 능력

이와 같은 창의성의 다양한 선행연구를 기반으로, 김종미 외(2010)는 창의성의 정의를 다음과 같은 두 가지 관점에서 정리하였다. 첫째, 기존의 것과 같지 않은 독창적인 아이디어를 만들어내는 것을 창의성이라 할

수 있다. 이는 단순히 동일함으로 판단할 것이 아니라, 생산적 사고와 창조적 사고를 포괄하는 것이며 질적으로 다른 여러 가지 사고 전체를 뜻하는 복잡한 것(Taylor, 1988), 희귀한 반응이나 사고(MacKinnon, 1962), 새로운 것을 생산하는 힘(Guilford, 1967)을 의미한다. 또한, 인간이 가지고 있는 보편적인 능력으로서, 일상에서 당면하는 문제를 나름의 새로운 방법으로 해결해 나가는 것을 의미한다. 둘째, 창의성은 문제 해결의 과정으로서 주어진 문제를 해결하는 것이다. 기존의 지식들을 조합하여 해답을 만들어내고, 그 해답을 통해 실제로 적응해 나가는 정신적 과정이라는 뜻이다(Torrance, 1962). 이와 같은 정의는 창의성 연구가 창의적인 인지 과정에 핵심을 두고, 문제 해결 능력이나 그 양식에 관심을 두고 있음을 드러낸다. 즉, 창의성은 단순히 독창적인 아이디어를 생성하는 것에 있는 것이 아니라, 주어진 문제를 새로운 방향에서 해결하는 것을 의미한다. 처음 살펴본 창의성의 사전적 정의와 더불어 앞서 살펴본 정의에서 주로 등장하는 새로운 아이디어의 생성은 창의성의 한 요소에 지나지 않는다. 결론적으로 창의성은 새로운 아이디어의 생성을 통해 주어진 문제를 적절한 방향으로 해결하는 능력이다.

앞서 살펴본 창의성의 여러 정의에 따라, 본 연구자는 창의성을 새로운 아이디어의 생성을 통해 주어진 문제를 적절한 방향으로 해결하는 능력이라 하였다. 이를 통해 우리는 창의성을 기반으로 한 문제 해결 사이에 이를 위한 사고방식이 요구된다는 점을 유추할 수 있다. 이와 같은 창의적 사고의 구성에 대해 박영태(2002)는 [그림 Ⅲ-1] 과 같은 도식을 활용하기도 하였다. 도식에 대해 좀 더 살펴보면, 문제 해결의 과정에서 창의성은 목적 지향적이며 조건적임을 뜻하게 되는데 이는 문제 해결을 위한 노력이나 조건의 확인, 재구조화, 정교화 등의 문제 해결의 과정 곳곳에 적절한 아이디어가 요구되기 때문이다. 일반적으로 문제를 해결하기 위해서는 문제에 내포된 조건들을 고려해야 하는데, 이때 이 조건과 조건 속에 내포된 법칙들을 발견하고 유기적으로 조직하는 것에 창의성이 필요하다.

[그림 Ⅲ-1] 창의적 사고의 구성(박영태, 2002)

다시 말해서, 창의성을 기반으로 문제의 성격을 규명하고 내재되어 있는 조건들을 발견함으로써 우리는 새로운 해결 방안을 만들어 나갈 수 있다(김종미 외, 2010). 앞서 본 연구자는 창의성에 대한 정의를 정리하며, 창의성은 단순히 새롭고 독창적인 아이디어를 생성해내는 것이 아님을 확인하였다. 창의성과 문제 해결의 관계를 통해, 우리는 창의성과 그 교육의 방향에 대해서도 유의미한 결론을 도출해낼 수 있다. 이에 연구자는 본 연구의 목적과 맥락에 맞추어 일반 창의성과는 학문적 특성으로 인해 차이를 보이는 수학적 창의성과 그 교육에 대해 논의해보도록 하겠다.

2. 수학적 창의성

2.1 수학적 창의성과 그 요인

일반 창의성에 대한 논의가 활발히 진행되던 초기에는 일반 창의성과 수학적 창의성이 엄밀한 구분 없이 논의되었다(이강섭, 황동주, 2007). 그러나 많은 연구자가 수학 교과의 특성을 반영한 창의성 연구가 필요하다는 것을 인지하고, 관련된 연구를 활발히 진행해왔다. 아쉽게도 수학적 창의성에 대한 논의 또한 일반 창의성과 같이 다양한 정의와 관점들이

연구되고 있으나, 일정한 합의 또한 이루어지지 못하는 상황이다. 물론, 수학적 창의성에 대한 논의는 일반 창의성이 논의에서 빠지지 않는 Guilford나 Torrance, Sternberg, Renzulli 등의 주장 또한 수용되어 진행되기도 하였다. 그러나 일반 창의성의 경우 심리학적 구인을 기반으로 발달되었기 때문에, 그들의 연구를 그대로 수용하기에는 수학 교과의 모학문적 특성을 반영하기 어렵다는 지적들이 이어져 왔다(한국과학창의재단, 2009a). 이와 같은 학문적 특수성을 반영한 수학적 창의성에 관한 연구들 중 Haylock(1987)과 Ervynck(1991)의 연구가 빈번하게 인용된다. Haylock(1987)은 수학적 창의성을 ‘사고의 고착화를 극복하고 정신적 틀을 벗어나는 능력’이라고 설명하였는데, 이는 다양하고 독창적인 반응을 할 수 있는 능력으로 수학적 창의성을 정의하였다고 볼 수 있다. 이와는 조금 다르게, Ervynck(1991)은 수학이 가진 특별한 논리-연역적인 성격과 더불어 생성된 개념들이 핵심에 통합되는 것에 적절한지를 고려하면서 구조적으로 사고하고 문제를 해결하는 능력으로 수학적 창의성을 정의하였다(한국과학창의재단, 2010). Ervynck(2003)은 이해와 직관, 통찰력, 일반화라는 4가지 요소가 상호작용하면서 수학적 창의성이 나타난다고 주장하기도 하였다. 이를 살펴보면, Haylock와 달리 Ervynck의 정의는 과정과 산출물을 동시에 고려함을 알 수 있다. Sriraman(2004)은 수학적 창의성의 특성을 사회적 상호작용, 발견적 방법의 사용, 심상, 직관과 증명, 형식적 증명으로 소개하고(한국과학창의재단, 2009b), 수학적 창의성을 유의미하게 지식을 확장시킬 수 있는 독창적인 산출물을 만들어내는 능력이라 설명하기도 했다(서보억, 신준국, 2017).

국내에도 수학적 창의성을 논의한 다양한 연구들이 있다. 김홍원 외(1996)는 수학적 문제 상황에서 고정된 사고방식을 탈피해 다양한 산출물을 만들어내는 능력을 수학적 창의성이라 보았다. 황우형 외(2006)는 학교 수학에서의 창의성과 일반 창의성을 구별하여, 수학 내용을 새롭게 창조하는 것이 아닌 많은 수학자로부터 정제된 수학을 스스로 발견하는 것이 창의성이라고 주장하였다. 따라서 이를 위해 수학적 지식을 유기적

으로 조직할 수 있어야 한다고 설명하였다. 또한 김진호(2004)는 수학적 창의성을 새로운 지식을 창출하는 과정에 초점을 두고 새로운 수학적 지식의 생성 관점에서 수학적 창의성을 논의하기도 하였다. 이와 유사하게 박만구(2009)는 다양한 국내외 수학적 창의성의 연구를 정리하고, 수학적 창의성을 '문제 상황을 수학적으로 해결하는 과정에서 독특하게 사고하고, 예기치 못한 새로운 연결 및 산출물을 만들어내는 특성'으로 정리하였다. 본고는 다음과 같이 여러 선행 연구가 도출한 수학적 창의성의 정의에 대해 정리하였다.

〈표 Ⅲ-2〉 수학적 창의성의 다양한 정의

연구자	정의
Haylock(1987)	사고의 고착을 극복하고 정신적 틀을 벗어나는 능력. 즉, 개방된 수학적 상황에서 다양하고 독창적인 반응을 할 수 있는 능력.
Ervynck(1991)	수학이 가진 특별한 논리-연역적 성격과 생성된 개념이 핵심에 통합되는 것이 적절한지 고려하며 구조적으로 사고하고 문제를 해결하는 능력.
Krutetskii(1976)	다양한 해결책을 도출하며 정형화된 형태를 깨뜨리고, 자기 제한을 극복하는 사고 과정의 유연성.
김홍원 외(1996)	수학적 문제 상황에서 고정된 사고 방식을 탈피해 다양한 산출물을 만들어내는 능력.
박만구(2009)	문제 상황을 수학적으로 해결하는 과정에서 독특하게 사고하고, 예기치 못한 새로운 연결 및 산출물을 만들어내는 특성.
이강섭, 황동주 (2003)	수학적 문제 상황에서 고정된 사고 방식을 탈피하여 다양한 산출물을 내는 과정이며 능력.
이대현, 박배훈 (1998)	수학적인 문제 상황에서 학습자가 기지의 사실이나 스스로 창안한 전략, 방법을 이용하여 새롭고 가치있는 결과(문제 해결)를 산출해내는 능력.
도종훈(2009)	사고의 유연성, 문제 상황에 내재된 수학적 구조와

	불변성의 통찰.
유윤재(2009)	산출물과 인지 과정이라는 두 가지 관점을 포함한 수학적 문제 해결의 능력.
정치봉(2009)	직관을 비롯한 수학적 활동 과정과 산출물의 통합.
황우형 외(2006)	학교 수학에서의 창의성은 수학 내용을 새롭게 창조하는 것이 아닌, 수학적 지식을 유기적으로 조직하여 많은 수학자로부터 정제된 수학을 스스로 발견하는 것.

본고는 창의성과 수학적 창의성의 여러 가지 정의와 요인들에 대해 살펴보았으며, 일반 창의성과 수학적 창의성은 다소 상이한 측면이 있음을 확인하였다. 그러나 이와 같은 수학적 창의성에 대한 다양한 정의에도 불구하고, 평가의 영역은 여전히 일반 창의성의 구인인 유창성, 유통성, 융통성, 독창성을 요인으로 사용하고 있다(김판수, 2004). 즉, 수학적 창의성의 정의와 요소들의 연구가 활발히 진행되고 있음에도 불구하고 연구의 흐름을 반영하지 못한 심리학적 구인이 평가 요인으로 제시하고 있다는 것이다.

2.2 수학적 창의성 교육

앞서 본고는 수학적 창의성에 대한 국내외 다양한 연구들에 대해 살펴보았다. 수학적 창의성에 대해 합의된 정의는 없지만, 공통적으로 언급된 특성들이 존재하는데 이는 수학적 창의성을 학문적 영역과 학교 수학의 영역으로 구별한 것이다. 먼저 학문적 영역에서의 수학적 창의성은 앞서 살펴본 Ervynck(1991)의 주장을 근간으로 수학의 논리적이고 연역적인 성격을 기반으로, 새로운 개념을 수학의 주요 핵심과 통합시키는데 적절한지를 고려하는 동시에 구조적으로 사고하며 문제를 해결할 수 있는 능력이라 볼 수 있다. 반면에 학교 수학에서의 영역은 이보다는 조금

더 문제 해결에 초점이 맞추어져 있다. 이때의 수학적 창의성은 수학적 문제 상황에서 기존의 지식이나 경험을 바탕으로 고착된 틀에서 벗어나 주어진 문제를 다양한 방법으로 분석하고, 문제의 요소나 수학적 아이디어를 새로운 방식으로 결합해 문제를 해결하는 것이다. 많은 수학교육학자들이 나름의 관점에서 수학적 창의성을 바라보고, 이에 따라 교수-학습 및 평가와 관련된 연구를 제시하고 있다. 우리나라에서도 수학적 창의성을 학교 현장에서 지속적으로 강조하고, 실제로 적용할 수 있는 교수-학습 모델과 방안이 개발될 필요가 있으며, 평가에 반영할 수 있는 수학적 창의성을 이루는 요소들과 관련된 연구가 필요함과 동시에 창의성의 측정이 아닌 창의성의 계발에 초점을 둔 평가 방안을 연구할 필요가 있다(한국교육과정평가원, 2012). 본고는 이에 따라 국내외 창의성 교육과 관련된 연구를 살펴보고, 적절한 교수-학습 설계 방안 및 평가 방안을 모색하고자 한다.

해외 창의성 교육 연구

다양한 수학적 창의성의 연구에서 공통으로 지적하는 것 중 하나는 수학적 창의성을 신장하기 위한 실질적인 교수-학습 모델이나 평가 준거와 관련된 연구가 요구된다는 것이다. Mann(2006)은 수학적 창의성에 대한 일반적인 정의(accepted definition)의 부재가 수학적 창의성과 관련된 연구를 방해한다고 주장하였는데, 이에 따르면 수학적 창의성에 대한 요인이나 정의에 대한 합의된 논의가 선행되어야 이와 관련된 실제성과 현장 적용성을 고려한 연구가 활발히 진행될 수 있다는 점을 알 수 있다. 수학적 창의성에 대한 합의된 정의나 요소가 존재하는 것은 아니지만, 다양한 연구자들이 나름의 맥락 속에서 창의성 교육과 평가를 연결하려는 시도를 찾아볼 수 있다. 수학적 창의성 교육 혹은 평가와 관련된 몇 가지 연구를 살펴보기로 하자.

수학적 창의성과 수학 영재성을 동일한 것으로 보고, 하나의 정신 작

용을 다른 것으로 변환하는 것을 강조한 Krutetskii(1976)는 수학적 사고를 강조하고, 수학자의 연구에서 생성되는 것과 유사한 창의성을 중시하였다. 따라서 새로운 문제 해결 방법이나 개념을 생성하는 창의성 교육을 추구하였다. 이와는 조금 다르게 Sheffield(2006)는 발산적 사고에 집중하였는데, 그는 문제를 인식하고 다양한 해결책을 생각해내며, 결과를 추론하고 입증하는 과정과 이에 대한 의사소통을 강조하였다. 따라서 새로운 아이디어에 따른 다양하고 독창적인 산출물을 이끄는 창의성 교육을 강조하였다. Krutetskii에 비해 수학 내용 지식보다는, 앞서 살펴본 창의적 사고나 문제 해결에 좀 더 집중하였다고 볼 수 있다. 다음으로 Becker와 Shimada(1997)는 앞서 언급된 학자들에 비하여 학교 수학에서 적용하기 가장 좋은 맥락을 지니고 있다. 이들은 수학적 창의성의 증진과 평가를 위해서는 개방형 문제를 강조해야 한다고 보았으며, 따라서 교육과정의 범위 내에서 다양한 문제 해결을 강조하고, 산출물에 의한 창의성 평가 등을 쉽게 진행할 수 있는 교육을 논의하였다(한국과학창의재단, 2009a). 이처럼, 많은 학자가 나름의 맥락 속에서 수학적 창의성을 향상시킬 수 있는 교육을 제시하였으며, 문제 해결 방법이나 산출물을 비롯한 여러 가지 방법을 통해 창의성을 교육하고 평가할 수 있는 방향을 제시하였다.

수학적 창의성의 평가 또한 앞서 교육의 영역에서 살펴본 바와 같이, 연구자가 형성한 수학적 창의성의 맥락을 따르게 된다. 秋田美代(2001)은 확산성과 논리성, 유창성, 유연성, 독창성을 창의성의 다섯 가지 요소로 정의하였으며, 각각에 대한 가중치를 부여하여 창의성을 측정하였다(김판수, 2014). 또한, 학교 수학의 창의성과 관련된 논의에서 빠지지 않고 등장하는 Sriraman(2006)은 창의성의 상대적인 특징에 초점을 두었는데, 이로 인해 수학적 창의성의 평가에는 학습자의 이전 경험과 유사한 교육적 경험을 보유한 타 학습자의 수행을 연관 지을 필요가 있다는 점을 주장하기도 하였다. 본 연구자는 수학적 창의성의 평가 중 널리 사용되는 Leikin(2009)의 방법에 대해 소개하여, 수학적 창의성 평가에 대한 이해

가 연구자가 지닌 수학적 창의성의 맥락을 설명할 수 있는 수단이 된다는 점을 논의해보고자 한다.

Leikin은 창의성을 일반 창의성(general creativity)과 특수 창의성(specific creativity)으로 구별하고, 학교 수학에서의 수학적 창의성은 대개 문제 해결과 관련된다고 주장하며 ‘다중해법(MTS: a multiple-solution task)’이 존재하는 문제를 통해 수학적 창의성을 평가하는 방법을 소개하였다. 이를 위해서는 ‘해법 공간(solution space)’을 파악해야 한다고 논의하였는데, 이는 동일한 문제라도 해결의 주체와 시기에 따라 해법 공간이 다르다는 점을 기반으로 한다. 또한, 유창성, 유연성, 독창성을 기준으로 하여 요소들을 종합적으로 정량화한 뒤, 수학적 창의성에 대한 지표를 제시하였다.

이경화(2015)의 설명에 따라 이를 간략하게 논의하자면, 서로 다른 해법마다 유창성은 해법으로서 적합하다면 1점씩 부여한 후 전체적으로 합하고, 유연성과 독창성은 독립적으로 평가한다. 유연성은 개별 평가를 진행하는데, 학습자가 도출한 해법과 해법을 비교하여 점수를 수준에 따라 각각 10점, 1점, 0.1점씩 부여한다. 다음으로 독창성 평가는 총 인원이 10명 미만일 때는 통찰이나 교육과정 외의 요소가 포함되어 있는지에 대한 여부를 기준으로 하며, 10명 이상의 평가를 진행할 때는 구성원 전체의 해법 공간을 파악하여 각 해법의 빈도수를 퍼센트(%)로 제시한 뒤 점수를 부여한다. 개별 평가의 경우 각 해법을 앞서 제시한 기준 두 가지를 모두 판정하여 점수를 총합한다. 이와 같이 각 해법에 대한 유연성과 독창성에 해당하는 창의성 점수를 구한 뒤, 그 점수의 합을 구하면 일차 창의성 점수가 도출된다. 그 후에는 일차 창의성 점수에 유창성 점수를 곱하여 최종 창의성 점수를 구한다. 즉, 똑같은 개수의 해법을 찾더라도 유연성과 독창성의 평가 점수가 최종 점수에 큰 영향을 미치기 때문에, 유창성을 고려하는 동시에 유연성과 독창성에 적절히 비중을 두는 평가 모델로 볼 수 있다.

국내 창의성 교육 연구

해외에서 창의성 교육이 발전해온 흐름보다는 조금 늦지만, 우리나라에서도 1960년대 후반부터 창의성과 관련된 연구가 등장하기 시작하였다. 또한 제 3차 교육과정부터 2015 개정 교육과정에 이르기까지, 수학과 교육과정의 인재상 영역에서 창의성은 빠지지 않고 다루어져 왔다. 최병훈과 방정숙(2012)은 1997년부터 2011년까지 국내 학술지를 기반으로 수학적 창의성의 연구 동향을 분석하기도 하였다. 연구에 등장한 연구주제별 분류기준에 따른 논문 비율은 <표 Ⅲ-3>과 같다.

<표 Ⅲ-3> 수학적 창의성 연구주제별 분류[7)]

주제	논문 편수	비율
수학적 창의성의 일반연구	17.5	15.4
교육과정 및 교과서	5.5	4.8
수학적 창의성 교육방법	62.5	54.8
교사와 관련한 연구	8	7.0
수학적 창의성 측정과 평가	15.5	13.5
기타	5	4.4
합계	114	100

이에 따르면, 우리나라 수학적 창의성의 연구에서 가장 활발하게 이루어지는 주제는 ‘수학적 창의성 교육방법’으로 54.8%를 차지하였다. 다음으로는 수학적 창의성의 개념이나 일반 창의성 등과의 개념을 비교한 ‘수학적 창의성의 일반연구’로 15.4%에 해당하였으며, ‘수학적 창의성 측정과 평가’와 관련된 연구는 13.5%에 그쳤다. 수학적 창의성을 신

7) 앞서 언급한 최병훈과 방정숙(2012)의 표에서 주제별 하위 요소를 제외하고, 주제별 논문 편수와 비율만을 정리하여 재구성하였다.

장시키고, 다양한 매체를 활용하거나 문제 해결을 위한 프로그램과 관련된 연구들은 전체 연구에서 절반 이상을 차지했다.

이처럼, 실제로 많은 연구들이 다양한 방법으로 수학적 창의성을 향상시킬 수 있는 논의들을 진행하였다(이대현, 2012; 류성림; 2000; 김진호 외, 2003; 박진형, 2017). 그러나 논의를 이어가보면, 교수-학습 설계 이후 이를 평가할 수 있는 맥락을 제공할 연구는 10%대에 머물렀다. 그마저도 연구용으로 제작되었거나, Guilford의 확산적 사고에 근거하여 만들어진 측정 검사가 대부분이다. 즉, 수학적 창의성의 학문적 특성을 살려 이를 계발하고 평가할만한 실질적인 논의가 진행되지 않는 상황이다.

국내의 많은 연구자들도 앞서 살펴본 해외 연구자들처럼, 유창성, 유연성, 독창성으로 꼽히는 기존의 창의성 평가 요소가 수학적 창의성을 측정하기에는 한계가 있다고 주장하였다(황우형, 최계현, 김경미, 이명희, 2006; 김부윤, 이지성, 2005; 유윤재, 2009). 이와 같은 논의를 기반으로 김판수와 김난영(2013)은 학교에서 학생들의 창의성을 평가할 목적으로 구성된 연구가 부재한 현실을 지적하고, 실제적인 맥락에서 학교 현장에 적용할만한 수학적 창의성의 연구가 필요하다는 사실을 논의하였다.

3. 수학적 창의성과 수학화

수학적 수단을 기반으로 현상을 정리하고 조직하며, 현상을 정리하고 조작하는 수단이 되는 ‘본질’을 찾는 활동을 수학화라 한다. 수학화의 원동력은 사고 수준의 향상을 위한 전제가 되는 반성적인 사고 태도이며, Freudental(1991)에 의하면 수학화 활동이란 수학적 활동으로 결과가 아닌 과정에 중심을 두고 수학을 창조해 나가는 과정 그 자체를 뜻한다(우정호, 2011). 또한, 수학은 확실성을 추구해나가는 정신적 활동으로, 현실을 매체로 현상과 본질의 교대에 의해 더 높은 수준의 상식화에 이르는 사고 수준의 상승을 수학화라 하였다(Freudental, 2008). 이에 따르

면, 학습자들이 스스로 수학적 이해를 추구하고 창조해나가는 과정 전체가 수학화에 포함된다.

수학화는 수평적 수학화와 수직적 수학화로 나누어지는데, 수평적 수학화는 문제 장면을 포착하여 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 것, 그리고 수직적 수학화는 세련된 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 것을 의미한다. 수평적 수학화는 일상의 세계에서 기호의 세계에 이르며, 수직적 수학화는 기호의 세계에서 기호를 이해하고 반성하며, 형성하고 조작하는 행위를 말한다(Freudental, 2008). 즉, 일상적인 경험을 수학적인 이해로 추상화시키는 것과 관련이 된다고 볼 수 있으며, 수학화 교육을 위해서는 풍부한 맥락이 포함된 재조직 수단이 요구된다는 것을 도출할 수 있다.

이경화(2016)는 이와 같은 Freudental의 논의를 중심으로, 수학화는 수학의 창조 과정을 뜻한다는 점과 함께 현실적 수학교육 이론과 수학화의 연관성을 들어 수학화가 수학적 창의성의 원천임을 주장하였다. 이는 인간은 생득적으로 수학화할 수 있는 역량을 보유하고 있기 때문에, 자유롭게 수학을 창조할 수 있다는 논의를 토대로 한다. 따라서 이와 같은 수학화를 거치지 않고 수학을 창조하는 것은 불가능하며, Freudental이 논의한 확실성의 창조를 근거로 하여 확실성을 추구하는 태도는 수학화를 자극하고 그 결과로 수학을 창조하기 때문에, 수학적 창의성과 맥락을 함께한다는 논지를 이끌어냈다. 살펴본 논의들을 정리하자면, 수학화란 확실성을 추구하고자 하는 논리적인 과정을 중심으로 수학적 본질을 탐구하는 과정을 뜻하며, 점차 단계가 지날수록 좀 더 높은 수준으로 발전하여 수학적 지식이 체계화된다.

4. 논의

일반 창의성에 이어 수학적 창의성과 관련된 선행연구를 고찰한 결과,

많은 연구자가 일반 창의성과는 다른 수학 교과만의 특수성을 반영한 수학적 창의성에 대한 정의와 교수-학습 설계, 평가 등이 마련될 필요가 있다는 점을 지적하였다. 특히, 수학적 창의성의 요소나 일반 창의성과의 비교 등을 포괄한 정의에 관한 연구나 커리큘럼, 프로그램 설계 등의 연구는 활발히 진행되는 편이나, 이를 평가하여 교수-학습 설계의 효과성을 증명할만한 평가 관련 연구는 교수-학습 관련 연구의 수와 큰 차이를 보였다. 교육평가란 교육과정과 교수 프로그램을 근간으로 교육 목표가 얼마나 달성되었는지를 뜻한다(Tyler, 1949). 수학적 창의성을 계발시키기 위한 여러 영역과 다양한 방법을 활용한 연구들에 이어 이를 분석하는 적절한 논의가 부족한 것은, 교수자는 질적으로 더욱 정제된 형태의 교수-학습 프로그램을 제공할 수 있고 학습자는 자신의 역량을 발전시킬 기회가 사장되는 것이라고도 할 수 있다.

한국교육과정평가원(2010)은 학교에서 창의성 교육이 실현되지 못하는 몇 가지 이유에 대해 언급하였는데, 그중 하나가 창의성을 평가하는 방식이 없다는 점을 지적이었다. 이는 앞서 지속적으로 언급된 수학적 창의성의 발달을 저해하는 요인과 연관 지을 수 있는데, 학습자가 어떻게 수학적 지식과 관점을 확립해나가는지를 분석하는 논의가 여전히 미진한 경향을 보이기 때문이다. 연구의 서론에서 언급했듯, 또한 현재 수학에서 요구되는 지식적 측면과 수학 교과만의 특성을 살린 균형적인 창의성 교육과 평가가 함께 어우러진 프로그램이 학교 현장에는 전무한 상황이 이와 맥을 함께 한다.

수학화를 적용한 수업 모델은 수학적 지식과 경험을 활용하여 학습자로 하여금 다양한 상황을 수학적으로 관찰하고 해석하는 경험을 꾀할 수 있다. 예를 들어, 생활 속에서 살펴볼 수 있는 무늬 속에 숨겨진 수학적 원리를 탐구하는 활동에서 출발해 도형의 구성이나 이동 원리, 이를 활용한 디자인 활동, 작품 만들기 등으로 수업을 설계할 수 있다(이대현, 2012). 일반적으로, 수학적 문제 상황에서 우리는 이를 해결하기 위해 다양하고 독창적인 아이디어를 발생시키고, 이를 활용한 해결 방법을 도출

한다. 따라서 수학화를 기반으로 학습자에게 문제 상황을 부여하고, 이를 어떻게 수학적으로 해결해나가는지와 관련된 과정을 분석하면 어떠한 수학적 아이디어를 도출하고 활용하는지를 알 수 있다. 앞서 살펴본 바와 같이, 학습자는 수학적 이해를 추구해나가는 활동을 통해 확실성을 추구하고 점진적으로 더 높은 사고 수준으로 나아가기 때문이다.

김연식과 정영옥(1997)은 점진적인 수학화를 추구하는 수학 학습에서 결과보다 과정을 중시하는 평가를 어떻게 할 것인지를 간과할 수 없다는 것과, 기존의 지필 고사 형태는 수학화에서 강조하는 사고 활동을 평가하기엔 적절하지 않다고 설명하였다. 또한, 등급을 매기기 위한 평가가 아닌 학습자가 무엇을 알고 있고 할 수 있는지를 알 수 있는 개개인에 대한 총체적인 정보를 제시해 줄 수 있는 열린 문제와 관찰법, 연구 과제 등을 비롯한 형성 평가 중심의 다양한 평가 형태가 제시되어야 한다고 설명하였다. 이는 수학화가 적용된 교수-학습 설계 모형과 이에 따른 교육의 결과 분석이 이전과는 다른 관점이 요구되며, 과정 중심의 논의가 진행되어야 함을 시사한다. 더불어, 앞서 살펴본 실행식의 특징을 적용할 수 있는 여유와 맥락에 따라 연구의 정당성을 부여한다.

본고는 앞서 살펴본 선행연구와 학교 현장의 실제를 기반으로 수학적 창의성에 대한 관점을 정리한 뒤, 이를 계발하기 위한 교수-학습 모형을 설계하여 적용한 후 학습자가 어떻게 나름의 수학적 창조를 이어가는지를 분석하는 것까지 이어지는 연구의 흐름을 지니고 있다. 학교 현장에 적용할 수 있는 실제적이며 견고한 교수-학습 설계를 도출하기 위해 앞서 논의된 수학적 창의성과 수학화의 여러 선행 연구를 반영할 것이며, 특히 학습자가 어떻게 수학적 창의성을 발휘하여 나름대로의 관점을 명확히 하고 의미를 부여하는지를 집중적으로 평가하고자 한다. 다음 장부터는 이와 앞서 논의한 실행식 학습 환경을 융합한 교수-학습 설계와 평가 방안을 논의해보도록 하겠다.

Ⅳ. 구성주의와 교수-학습 설계

1. 구성주의

본 장에서는 실행식의 개발 철학인 구성주의의 관련 연구에 대해 살펴본다. 먼저 대표적인 학자인 Papert의 연구를 또 다른 구성주의 학자들과 비교하여 살펴보고, 구성주의 기반 지식의 구조와 수학화, 수학적 창의성을 각각 연관지어 알아본다. 특히, 실행식을 매개로 한 본 연구가 왜 구성주의 교수설계를 기반으로 진행되어야 하는지, 이것이 어떻게 수학화를 아우르고 수학적 창의성을 계발하는 교수-학습과 관련성이 있는지를 중점으로 논의하고자 한다.

1.1 구성주의(Constructionism)

Papert의 구성주의(constructionism)란 교육을 접근하는 하나의 관점으로, Papert(1980)는 '이전에 학습할 수 있던 것보다 더 많이 학습할 수 있는 환경을 구성하는 것'을 구성주의(constructionism)로 정의하고, 학습이 일어나고 그와 동시에 의미 있는 지식을 구성할 수 있는 환경을 설계해야 한다고 주장하였다. 또한, 지식은 교사가 제공하는 것이 아니며, 학습자가 어떠한 가공물(artifact)을 구성할 때 자연스럽고 완전하게 지식을 구성한다고 주장하였다. 이때 구성주의의 도구는 하이퍼미디어(hyper midea)이며, 하이퍼미디어를 구성할 때 학습자는 다른 관점을 인지하고, 자신의 표현을 조직하는 것에 적극적으로 참여하게 된다. 즉, 하이퍼미디어는 학습자를 지식의 구성자로서 이를 이끌고 지원해주는 강력한 도구가 된다(Jonassen, 2006).

일반적으로 발달심리학에서 언급되는 구성주의(constructivism)의 경우

Papert의 구성주의(constructionism)와는 다른 측면이 존재하며, 이는 학습을 위해 강조해야 하는 것은 무엇인지에서 차이점을 발견할 수 있다. Papert의 구성주의는 바람직한 학습을 위해 도구(media)를 강조했으며, constructivism의 대표적인 학자인 Piaget는 '경험'을, Vygotsky는 '상호작용'의 역할을 중시하였다. 그렇지만 Papert의 구성주의에도 Piaget와 Vygotsky의 구성주의의 맥락이 녹아들어 있으며, 이는 다음과 같다.

Piaget는 인지적 구성주의를 주장한 대표적인 학자로, 인간은 주어진 환경 내의 사태를 이해하고, 이에 적절히 적응하기 위해 자신의 내재적인 정신구조를 바꾼다고 보았다. 이러한 정신구조는 자신이 가진 기존의 체계(scheme)에 새로운 정보를 수용하는 '동화(assimilation)'와 외부의 새로운 정보에 맞춰 자신의 구조를 바꾸어가는 '조절(accommodation)'의 두 과정으로 인해 발달한다고 보았으며, 기존 인지구조의 부적합성으로 인해 발생하는 인지갈등으로 인해 동화와 조절이 끊임없이 반복되면서 인간의 정신구조가 점진적으로 변화한다고 논하였다(송명자, 2012). 특히 Piaget는 정신의 발달적 변화는 질적인 차이를 가진 일련의 단계로 구성된다고 보고, 이를 4단계로 나누어 설명하기도 했다.

이러한 Piaget의 인지적 구성주의는 외부의 익숙하지 않은 자극에 대해 발생하는 개체의 반응을 기존의 체계에 그 자극을 포함 시키려는 시도로 해석하였으며, 이는 외계의 자극을 쉽게 내면화하기 위해서는 자신의 신체나 신체적 활동을 비롯한 익숙한 도구와 연결될 필요가 있다는 주장에 설득력을 부여한다(조한혁, 송민호, 2014). 즉, Piaget의 구성주의에서는 학습자가 교수 환경에서 자신이 배운 것을 동화와 조절을 통해 자신에게 유의미한 것을 학습하고, 이를 통해 학습의 구조를 쌓아가는 것을 논의했다고 할 수 있다. Papert는 이와 같은 Piaget의 인지적 구성주의를 이론적 배경으로 하는 동시에, 학습자가 문제를 직면하고 해결하기 위해 구체적인 학습 전략을 제시해야 한다는 주장을 중심으로 구성주의를 재논의 하였으며, 이에 대한 교수학습 환경으로 'Logo'를 제시하여 여기에 내재된 작동원리를 '강력한 아이디어(powerful idea)'라는

이름으로 소개하였다.

이때의 ‘강력한 아이디어’는 학습자로 하여금 사고의 새로운 방법을 제공하고, 영역과 영역의 관계를 되돌아볼 수 있는 원칙을 제공하며, 시공간을 초월하여 계속해서 영향력을 발휘하고, 제대로 숙련되었을 때 개인에게 강력한 힘을 부여할 뿐만 아니라 감정적 반응을 촉발하고 지식과 지식 사이의 연결을 알 수 있게 한다고 설명하였다(김화경, 2005; Bers, 2001). 따라서 학습자가 능동적으로 수학을 조직화하며 학습할 수 있도록 ‘강력한 아이디어’로 가득 찬 교수학적으로 의미 있는 환경을 제시하는 것이 매우 중요하며, 이러한 교육적 방법과 전략이 바로 Papert가 주장하고자 한 구성주의라고 할 수 있다.

앞서, 논의된 Papert의 구성주의에서는 교수학적으로 의미 있는 환경을 제공하기 위한 도구(media)를 강조했음을 확인했다. 이러한 Papert의 구성주의 이론에서는 Vygotsky가 주장한 사회적 구성주의와의 공통점 또한 확인할 수 있다. Vygotsky는 학습에 영향을 미친 사회적 요소에 관심을 갖고, 인간의 인지적 발달과 기능은 사회적 상호작용이 내면화되어 이루어지는 것이라고 주장했다. 따라서 인간은 타인과의 관계, 즉 상호작용의 영향을 받으며 성장하는 사회적 존재라고 주장하였다(박성익 외, 2015). Vygotsky는 아동의 지적 능력을 ‘근접발달영역(ZPD)’라고 설명하며, 근접발달영역이란 아동이 현재 스스로 과제를 해결할 수 있는 ‘실제적 발달수준(Level of Actual Development)’과 자신보다 인지적으로 유능한 성인이나 또래 집단의 도움을 통해 과제를 해결할 수 있을 것으로 기대되는 ‘잠재적 발달수준(Level of Potential Development)’간의 격차를 의미한다고 논하였다(송명자, 2012).

또한, Vygotsky는 개인은 이러한 사회적 상호작용을 통해 지식을 내면화함으로써 인지발달을 확립하게 되며, 이때 적절한 ‘비계(scaffolding)’을 제시하는 것을 통해 자발성과 타인에 대한 의존도 사이의 균형을 제시해야 한다고 보았다. 이는 개인이 궁극적으로 독자적으로 문제 해결 수준에 도달하는 것을 목표로 하게 된다. Papert의 구성주의

는 이러한 Vygotsky가 주장한 외부적 영향으로 설명할 수 있다. Vygotsky에 의하면, 사회적 상호작용을 통해 인간은 외부의 도구를 학습하여 내적으로 도구화한다. 수학에서 문자는 수학적 지식을 의사소통하고 표현하는 도구라고 할 수 있다. 따라서 이때 문자는 표현하는 외적인 도구이자, 학습자의 내면화를 촉진하는 내적인 도구라고도 할 수 있다. 수학적 문자는 학습자에게 외적 도구로 주어지며, 학습에 의해 내적으로 도구화되는 과정을 거치게 된다.

조한혁과 송민호(2014)에 의하면, Vygotsky가 언급한 외적인 도구는 사회적 상호작용을 통해 내적인 도구로 변환되며 이때의 상호작용은 문자 즉, 기호 체계의 사용에 의한 기호적 절차로 이루어지게 된다. 다시 말해서 수학적 상호작용이란, Vygotsky의 인지주의 이론에 의하면 기호적 절차를 거쳐 기호가 내포하고 있는 수학적 지식을 내면화하는 것으로 해석할 수 있다. 이때 이러한 수학적 상호작용을 촉진하는 상호작용의 매개(media)로서, 유의미한 학습 환경을 제공하는 것이 Papert의 구성주의와 연결된다. Papert는 아동이 적극적으로 학습할 수 있는 장을 제시함으로써, 학습자의 원활한 상호작용을 촉진하고 이에 더 나아가 학습자가 상호작용을 내면화하여 수학적 지식을 구성하는 것을 목표로 하였다고 할 수 있다.

결론적으로 Papert가 제시한 구성주의란, 학습자가 전략적으로 주어진 교수 환경을 매개체로 상호작용하여, 수학적 지식과 기호의 사이를 물리적으로 구성해나가고 내면화하는 것을 핵심으로 한다. 또한, Papert는 신체와 환경 사이의 능동적인 상호작용을 통해 이성이 발생한다는 '체화된 인지(embodied cognition)'의 관점을 제시하였다. 체화된 인지 이론은 행동과 감각, 인식의 밀접한 관련성을 강조하는 논의로, Papert는 이를 토대로 신체와 공간을 연결 짓는 가상의 공간이 요구되며 이를 기반으로 한 학습 환경을 중요하다고 주장하였다. 즉, Papert의 구성주의는 수학적 지식을 내면화 하고 체득할 수 있는 학습 환경과 그 속에서 발생하는 의사소통을 강조하였다.

또한, Papert(1980)는 지식은 교사가 제공하는 것이 아니라, 학습자가 구성하는 것이며 컴퓨터 프로그램이나 책, 기계 등을 비롯한 겉으로 드러난 것, 함께 공유할 수 있는 것들을 만드는 과정에 참여할 때 잘 드러나게 된다고 설명하였다. 따라서 구성주의의 사례 중 하나인 하이퍼미디어에서 얻은 새로운 정보를 조절하기 위해 학습자는 자신이 알고 있는 것과 연결해야 하며, 교수 자료를 공부하기보다는 만들어가면서 더 많이 학습하게 된다(Jonassen, 2006). 이러한 Papert의 주장은 Bruner의 이론을 통해 논의할 수 있다. Bruner는 지식의 구조를 요소로 하는 발견학습이론을 제시한 학자로, 어떤 교과라도 지적 성격을 그대로 두고 발달의 어떤 단계에 있는 아동에게도 효과적으로 가르칠 수 있다고 보았다.

더불어 Bruner는 스토리텔링을 지식을 조직화하기 위한 하나의 구조물이라고 주장하기도 하였다. Bruner는 지식의 구조는 수업의 양과 질을 결정한다고 보았으며, 따라서 동일한 내용이라도 어떻게 표현되느냐에 따라 학습이 촉진되거나 방해된다는 것을 설명하였다. 이때 강조된 것이 지식의 효과적인 표현 체계인 EIS이다. EIS는 차례로 '작동적 표현(Enactive representation)', '영상적 표현(Iconic representation)', '상징적 표현(Symbolic representation)'이며, 이는 순서대로 학습 내용을 실제 행동을 통해 표현하고, 그림을 비롯한 실제 모습을 담은 자료로 표현한 뒤, 언어나 기호로 학습 내용을 표현하는 것을 의미한다(김종미 외, 2010). 특히 이 중 가장 쉽게 이해할 수 있는 작동적 표현에서는 학습자가 신체적인 활동을 기반으로 지식을 형성하는 것으로, Bruner는 신체적 활동을 지식 형성의 기초 단계로 나타냈다고 할 수 있다.

이러한 논의는 Papert가 구성주의에서 주장했던 '체화된 인지'의 관점과 공통점을 가지고 있다. Papert는 신체와 공간을 연결 짓는 환경을 중시했기 때문이다. 더불어 Bruner의 지식에 대한 구조적인 접근과 표현체계의 디자인을 통해 스토리텔링 환경을 '지식을 구조화하는 방법'이라고 주장하기도 했다. 이는 Papert가 실행식을 통해 기존의 수학적 기호가 가지고 있는 어려움을 탈피하고, 학습자가 스스로 자신에게 의미 있는 형태로

기호를 받아들이고 사용할 수 있도록 학습 환경을 제공해야 한다고 주장한 것과 논점을 함께 한다. 결론적으로, Papert의 구성주의(constructionism)는 학습자가 능동적으로 유의미한 인공물을 구성하여, 이를 통해 스스로 학습할 수 있는 환경을 제공해야 함을 주장한다. 이는 지식적 맥락보다는 실제적인 맥락에 가까움을 시사한다. 특히 이때의 교육환경은 의사소통의 매개체로서, 학습자의 내적 인지 발달을 추구할 수 있도록 체화된 인지를 기반으로 한 표현 체계를 제공해야 한다.

1.2 구성주의와 수학화

앞서 살펴보았듯이, Papert가 제시한 구성주의는 인지심리학자들이 논의한 구성주의와는 다소 차이를 보인다. 인지적 구성주의의 대표적인 학자인 Piaget는 교육이론보다는 인지이론에, Papert는 실제적이고 교육적인 이론에 더욱 가깝다(김화경, 2006). 이에 근거해 생각해보면, Piaget가 말하고자 하는 구성주의는 개인이 어떻게 지식을 구성해나가는지와 관련이 있고, Papert는 학습자가 지식을 내면화하기 위한 교수 환경을 전략적으로 제시하는 것과 관련이 있음을 알 수 있다. 즉, Piaget는 구성을 하는 과정에, Papert는 방법에 좀 더 초점이 있는데, 본고에서 논의하는 실행식 학습경의 경우 Papert의 철학을 기반으로 주조되었으나, Piaget가 논의한 인지적 구성주의 메커니즘과도 상당한 관련성을 보인다. 앞서 살펴본 것처럼 Papert가 Piaget의 인지적 구성주의를 이론적 배경으로 삼아 논의를 진행하기도 했지만, 학습자에게 적절한 교수 환경을 제시하는 궁극적인 목적이 수학적 지식의 구성에 있기 때문이다. 구성주의는 학습자 개인이 지식을 구성하는 과정을 중시한다(우정호, 남진영, 2008). 따라서 Papert는 이와 같은 구성주의의 일반적인 논의와 맥을 함께하여, 학습자가 나름의 이해를 통해 수학적 지식의 구조를 의미 있게 구성해나가는 방법을 논의했다고 볼 수 있다.

Piaget는 '반영적 추상화'를 통해 수학적 개념이 발생되는 것을 설명하였으며, 이때 반영적 추상화란 인식 주체의 조정 활동으로부터 이루어진다. 즉, 학습자는 새로운 지식을 형성하기 위해 기존에 자신이 가지고 있던 인지 구조에 새로운 개념을 동화시키거나 인지 구조를 조절하여 새로운 개념을 수용한다. 그리고 이를 통해 지식의 관계망을 형성한다(우정호, 2011). 반영적 추상화에는 '반사'와 '반성'이라는 두 가지의 과정이 있으며, 이 둘은 서로 상보적인 관계를 가지고 있다. 반사는 전 단계에서 얻은 것을 보다 상위 수준으로 옮기는 것을, 전 단계에서 반사된 것을 새로운 수준에서 재구성하거나 이미 전이된 것과 전 단계의 요소를 관련 짓는 것은 반성을 뜻한다. 반사의 기초적 단계는 감각 운동적 움직임에서 출발하는 행동을 내면화하고, 개념화의 시초인 표상으로 투사시키는 것이다 우정호, 홍진곤, 1999).

즉, 반사는 이전 단계의 행동이나 조작을 사고의 대상으로 만들고, 상위 단계에서의 반성을 가능하게 한다. 이어 반성에 의해 등장한 새로운 형식은 동화와 조절 사이의 균형화 과정에서 등장하여 이전보다 정교해진 내용을 또 다시 반사한다. 이와 같은 과정을 거쳐 반사의 두 종류인 '내면화 → 주제화'의 순환이 반복된다. 이 순환은 수학 학습 상황에서 흔히 살펴볼 수 있으며, 반영적 추상화는 인간의 수학적 개념 형성과 수학의 발달 역사를 설명할 수 있는 메커니즘으로 작용한다. 정리하자면, 반사의 과정은 '내용'에 대한 내면화에서 출발하여 주제화로 귀착되며, 주제화된 내용은 다음 단계인 반성에 의해 새로운 '형식'을 구성하는 재료가 된다. 그리곤 순환 구조에 따라 이 형식은 좀 더 세련된 내용이 된다. 따라서 반성은 반사와는 다르게 새로운 형식을 창조적으로 구성하고, 그 형식이 점차 풍부해지는 구조를 가진다. 즉, 반성 과정은 고유한 창조성을 보유하기 때문에, 반영적 추상화는 생산적인 힘을 가진다(우정호, 홍진곤, 1999). 정리하자면, 반영적 추상화와 그 내부에서 발생하는 순환을 통해 학습자는 점차 이전보다 고등적이고 풍부한 수준으로 사고 과정을 이어가게 되며, 이와 같은 통합적인 과정이 이어지면서 수학 학습의 수준이 비약하

게 된다. 앞서 현상과 본질의 교대에 의해 더 높은 사고 수준으로 상승하는 것이 수학화이며, 수학화의 원동력은 사고 수준의 향상을 위한 반성적 사고 태도임을 확인하였다. 구체적 조작화에 따르면, 기존에 알고 있었던 수학적 지식과 개념화하고 주제화하는 과정이 선행되고, 그 변화와 과정에 대해 곱씹으면서 새로운 지식이나 개념으로 확장시킬 수 있다.

수학은 대개 엄밀성이 높은 교과로서 인식되지만, 학습자 개개인의 수준에 따라 느껴지는 엄밀성의 맥락이나 차원은 차이가 있을 수 있다. 따라서 개개인의 학습자가 자신의 수학적 지식에 비추어 다양하고, 새롭게 사고해보는 과정이 중요하며 이는 곧 수학화와 직결된다고 볼 수 있다. 이경화(2015)는 이와 유사한 논지를 기반으로, 평범한 학습자가 수학을 학습하기 위해서는 그 나름의 학습 과정과 인지적 순환을 통해 수학적 지식을 확장하고 변형시켜 새로운 지식을 창조하는 메커니즘을 적절히 조절할 수 있어야 한다고 설명하였다. 또한, 수학적 지식이 추상적이고 엄밀한 측면이 있지만, 이를 학습자가 스스로의 사고 과정을 통해 얻어나가도록 하면 수학적 창의성을 함양할 수 있게 되며, 이것이 수학적 지식의 본성이라 주장하였다.

1.3 구성주의와 수학적 창의성

앞서 본 연구자는 수학 교육의 목적과 모학문의 성격을 반영하여 초기 대수 학습자에게 스스로 인지적 맥락을 구성할 수 있는 적절한 체계를 제공하는 것이 중요하다고 언급하였다. 또한, 논의된 바에 따르면 반사와 반성의 순환으로 인해 이전의 수준을 넘어서 질적으로 수준이 향상되며, 이 수준이 높아질수록 더욱 세련되고 정교화 된, 창조적인 반성이 가능하다. 이를 주제화로 연결시키면 주제화한 것을 대상으로 반성할 때는 창의적인 사고가 요구되며, 이때 수학적 창의성은 반성적으로 사고하고 추상화하는 원동력이 된다(이경화, 2015). 개념의 논리적 구조를 습득할 수 있는 고차

적 사고와 표현을 발휘할 수 있는 경험들은 구체와 추상의 경계를 넘나들며 개념의 본질에 가까워진다. 즉, 인식 주체인 학습자는 인식론적 경험을 통해 다양한 해석을 쌓아가면서 나름의 지식에 대한 구조를 형성해나간다. 따라서 교수자는 학습자가 다양한 방식과 높은 수준의 수학적 경험을 수행할 수 있도록, 이에 적합한 교수-환경을 설계할 필요가 있다.

학습자는 현실 맥락과 결합된 수학을 알고, 그것을 다루는 도구이자 방법으로 모델을 창조하게 되면, 그것은 이미 창조된 수학이 아닌 '학생의 눈앞에서 창조되는' 수학을 배운다(Freudental, 1973). 즉, 교사 주도의 일방적 교육이나 객관주의적 인식론을 강조하는 것이 아니라 학습자가 주도적으로 경험을 쌓아가며 수학적 개념을 스스로 해석하는 과정이 필요하다. 이 과정은 수학화 그 자체로도 해석할 수 있다. 따라서 교사는 수업을 통해 수학에 대한 의미를 구성할 수 있도록 열린 문제를 제시하여 다양한 아이디어를 이끌어낼 수 있는 상황을 제시해야 한다. 이를 통해 학습자는 수학적 창의성을 발현시켜 고차적 사고력을 발휘할 수 있는 계기를 마련하며, 결과적으로 수학화를 통해 수학적 지식을 논리적으로 내면화하는 시도를 반복하게 된다.

그러나 수학 교과가 가지고 있는 확실성과 엄밀성을 비롯한 모학문의 특성으로 인해 학교 현장에서 교사들이 구성주의 기반 교수-학습을 적용하려는 시도가 타 교과에 비하여 부족한 실정이다. 이는 학습자 중심의 자율적인 문제 해결이 시간 낭비나 오류를 가져올 확률이 높다는 이유로, 그보다는 검증된 최상의 문제 해결 방법을 전달하는 것이 더 효과적이라는 주장을 기반으로 한다. 하지만, 이러한 수업 방식이 학습 내용을 전이하는데 어려움을 가져온다는 점을 문제점으로 삼기도 하였다(최명숙, 2001). 물론, 정제된 형태의 문제 풀이 방법을 그대로 전달하면 수학 교과에서 정확성을 빠르게 추구하는 것에는 도움이 될지도 모른다. 하지만, 이와 같은 전통적인 교육방법은 학습자가 스스로 수학적 지식을 내면화하고 구조화할 수 있는 기회를 부여하지 않는 경우가 많아 자신이 가지고 있는 인지적 불협화음이 어떠한 것인지 파악하지 못하게 된다.

더불어 학습자는 수학화를 통해 자연스럽게 확실성을 추구해나가게 되므로, 정확성을 추구할 수 있는 풍부한 맥락을 교수-학습 곳곳에 적용하는 것은 학습자가 사고를 반추하고 수학적 의미를 형성하게끔 할 것이다.

따라서 수학적 창의성 교육에서만큼은 학습자의 자유로운 시도가 시간낭비나 오류의 생성이라는 접근보다, 스스로 수학적 창조를 구성하려는 노력으로 받아들여야 한다. 이는 단순히 학습자에게 문제를 직접 풀어보는 기회를 주는 것을 넘어서, 그 과정 속에서 스스로 문제를 해결하고 의미를 추구해나가는 힘 혹은 원동력을 발휘하는데 큰 영향을 미칠 것이다. 창의성을 일깨우고 창조적 재구성을 통해 수학을 학습하게 하지 않으면, 수학적 창의성을 발휘할 기회를 놓치게 된다. 수학적 창의성의 주안점은 학습 과정에서 학습자를 스스로 창의성을 일깨우고 활용할 수 있는 상태로 이끄는 것에 있다(이경화, 2015). 이와 같은 논의에 이어 다음 절에서는 구성주의적 교수-학습에 대해 살펴보고, 이를 기반으로 수학적 창의성을 향상하기 위한 구성주의 교수-학습 설계는 어떻게 이루어져야 하는지를 논의하도록 하겠다.

2. 구성주의 교수-학습 설계

구성주의적 교수-학습 방법은 여러 맥락에 따라 다양하게 제시되고 있지만, 크게 다음과 같은 문제 중심의 교수-학습 환경과 학습자 중심의 교수-학습 환경이라는 두 가지 기본 전제를 바탕으로 하고 있다. 박성익 외(2015)는 기존의 인지가 변화하면서 발생하는 이해의 과정과 상태를 파악하고, 수행을 위한 지적 지능을 획득한 상태를 학습으로 규정하는 것이 문제 중심 교수-학습 환경 설계에 시사점을 준다고 설명했다. 그리고 학습자가 주체적으로 학습의 과정을 유의미한 지식의 구성 과정으로 이끌어나가며, 능동적으로 학습에 필요한 문제를 해결하는 주체자가 된다는 점을 학습자 중심의 교수-학습 환경 설계와 연관하여 설명하였다.

본 장에서는 이와 같은 두 가지 관점에서 구성주의 관점의 교수-학습 환경 설계에 대해 다루어보고, 구성주의를 활용한 대표적인 교수-설계 방법인 문제중심학습(PBL)과 이에 대한 한계를 극복한 e-PBL에 대해 논의해보도록 하겠다.

2.1 구성주의 교수-학습의 특징

구성주의 교수-학습에서 문제는 학습자가 해결해야 하는 상황을 뜻한다. 문제란 사전에 접해보지 못한 과제를 수행해야 하거나 세부적인 해결책이 주어지지 않은 상황을 말하며, 다양하고 예측이 어려운 상황이 발생하는 현대 사회에서 문제에 대한 적절한 해결책이나 대안을 탐색하여 상황을 극복하고 변화를 이끄는 문제해결역량은 사회적 요구로서 작용하고 있다(김혜영, 이숙정, 유지현, 2016). 구성주의에서의 학습 활동은 대부분 문제 해결을 의미하는데, 이때 문제는 해결하는 동안 발생하는 사고의 논리 과정을 드러낼 수 있어야 한다(Savery & Duffy, 1996). 즉, 이는 학습자가 문제를 해결하며 인지적 변화를 가져올 수 있는 문제를 구성하는 것이 매우 중요하다. 이는 앞서 논의한 수학 문제 해결 역량이나 고차적 사고력과도 연결되는데, 기존에 자신이 가지고 있던 혹은 주어진 정보를 활용하여 주어진 문제를 정확하게 파악하고 전략적으로 해결하는 것이 수학 교과에서 매우 중시되기 때문이다. 또한, 문제를 해결하기 위해서는 학습자가 스스로 문제 해결 과정을 주도적으로 노력하는 과정이 필수적으로 수반된다. 학습자가 주어진 문제를 해결하고 내재화하기 위해서는 문제 해결을 위한 동기나 목표를 필요로 하게 된다. 따라서 기존의 전통적인 교수-학습 환경과는 다르게 문제에서 요구되는 것을 학습자가 능동적으로 도출해낼 수 있어야 하며, 이는 학습자 중심의 교수-학습 환경과 연결되게 된다.

앞서 살펴봤듯이, 구성주의에서는 학습자가 학습 활동을 주도적으로 추진하고 문제 해결을 위해 자기주도적으로 지식의 구조를 설계하게 된

다. 따라서 이때 교사는 전통적인 수업에서의 일방적인 지식 전달자가 아닌, 학습자가 주체가 되어 학습을 수행할 수 있도록 이전과는 다른 교수-학습 체계를 준비해야 한다. Mayer(2011)는 학습에서 동기에 대해 ‘강한 힘을 가졌다’라고 묘사하였는데, 이는 학습에서의 동기가 주어진 정보를 선택하거나 조직화하고, 통합하는 적절한 인지적 과정에 참여하기 위해 발휘하는 노력의 양을 반영하기 때문이다. 따라서 교수자는 학습자가 자기주도적으로 학습에 참여할 수 있도록 적절한 동기나 흥미를 유발하는 것이 중요하다.

구성주의 기반의 교수-학습에서는 학습자가 지식을 스스로 구성한다. 학습자는 앞서 살펴본 동화와 조절의 작용을 근간으로 인식론적 과정을 거쳐 나름의 맥락을 형성하게 된다. 이때 습득되는 지식은 어떠한 맥락에서 학습되었는지에 따라 달라진다. 따라서 교수자는 학생들이 주어진 문제를 해결해 나가는데 필요한 학습 환경이나 자원, 그리고 깊이 있는 사고를 유도하기 위해 적절한 안내와 질문, 답변을 제공해야 한다. 이를 통해 학습자들은 스스로 주인의식을 갖고 생각 혹은 경험 등을 반영시켜 적극적으로 탐색하게 되며, 자신의 학습에 대한 자율성과 책무성을 지니게 된다.

더불어 교수자는 구체적이고 실제적인 과제(authentic task)를 제공하여, 사실적 지식보다는 학습자들이 관심을 가지고 능동적으로 학습에 참여할 기회를 제공해야 한다. 앞서 언급했듯, 구성주의에서는 학습자의 자율성을 보장하는 것이 매우 중요하며 교수자는 이를 위해 개방형 질문이나 답변, 여러 매체를 활용하여 깊이 있는 사고와 탐색을 유도할 수 있어야 한다. 더불어 객관주의가 지향하는 준거 기반의 결과 중심 평가보다는 과정 중심적 평가를 지향하여 다양하고 대안적인 평가 방법을 활용하는 것이 필요하다(최명숙, 2001). 이렇듯 전통적인 교수-학습 방법과 달리, 구성주의 기반의 교수-학습은 학생이 주도적으로 수업을 이끌어갈 수 있도록 교수자가 학습에 필요한 적절한 매개들을 제공하고, 지지하는 것에 초점이 맞추어져 있음을 알 수 있다.

2.2 PBL과 e-PBL

PBL

구성주의를 적용한 교수-학습 설계에는 구성주의 학습 환경 설계모형(CLEs), 문제중심학습(PBL), 완전학습 등을 비롯한 다양한 설계 방법이 있다. 각 방법마다 어디에 중심을 두는지, 어떠한 절차를 가지는지는 조금씩 다르지만, 모두 구성주의 철학이 기반이므로 근본적으로 앞서 살펴본 문제와 학습자를 중심의 학습 환경과 관련된 논지를 이어간다. 더불어 Ertmer와 Simons(2006)에 의하면 PBL은 학습 내용에 대한 심도 있는 이해를 촉진시킬 뿐만 아니라, 학습자의 고차적인 사고능력을 발전시키는 목적을 지니고 있다. 본 연구자는 수학적 문제 해결 역량을 중심으로 수학적 창의성을 평가하려는 목적을 지니고 있기 때문에, 학습자의 학습을 촉진하는 동시에 문제 해결력에 유의미한 효과를 미치는 PBL 모형을 접목하였다.

PBL의 특징은 비구조화된 문제, 문제 중심의 지식구성, 학습자의 역할, 교수자의 역할, 그리고 협동을 통한 그룹 활동의 다섯 가지가 있다. 박성희(2009)의 연구를 기반으로 한 PBL의 특징은 다음과 같다. 먼저, 비구조화된 문제는 단순한 공식을 따르지 않으며 한 가지 이상의 정답을 가진다. 따라서 문제 해결 과정에서 비판적이고 성찰적인 사고 능력을 요구한다(Steepen, 2002). 두 번째 특징은 학습자들이 문제를 중심으로 지식을 구성한다는 것인데, 학습자들은 문제를 분석하는 과정에서 새로운 정보를 얻고 이때 다양한 내용을 통합하면서 학습이 이루어지게 된다. 앞서 본고에서 연구의 정당성을 확보하면서, 일상의 다양한 상황에서 문제를 해결하기 위해 창의적이고 고차적인 사고 역량이 요구된다는 점을 논의하였다. 문제 중심 학습은 많은 정보를 기반으로 다양한 관점을 수용하면서, 상황에 대한 심도 있는 이해와 함께 정교한 해결책을 제시할 수 있는 능력을 함양할 수 있게 한다(Savery, 2006). 따라서 본고에서 추

구하는 문제 해결 기반의 창의성 함양과 맥락을 함께하는 경향이 있음을 확인할 수 있다.

세 번째, 학습자는 자신의 학습에 책임을 지고 능동적으로 학습을 한다. 이는 앞서 살펴본 구성주의 교수-학습의 특징 중 하나인데, 학습자는 문제 해결 과정과 결과물의 책임이 자신에게 있을 때 학습에 대한 동기가 증가하며 이로 인해 주인의식이 상승한다(Hmelo-Silver & Barrow, 2006; Savery & Duffy, 1995; Savery, 1999). 이는 문제를 해결하기 위해 학습자가 주도적으로 노력하는 과정이 요구되기 때문에, 이를 위한 동기나 목표가 자연스럽게 유발되는 것으로 이어지게 된다. 또한, 학습을 하는 방법을 배우게 되므로, 메타인지를 학습하기도 한다. 이와 같은 자기주도적 학습을 위해 문제 해결의 과정에서 교수자는 상황에 맞는 적절한 도움과 조언을 줄 필요가 있음을 추측할 수 있다.

이와 관련된 내용이 바로 네 번째 특징인 교수자는 모델링과 코칭을 통해 학습자의 문제 해결 능력을 촉진한다는 것이다. 전통적인 교수-학습 방법과는 달리, 교수자는 학습자가 지식을 구성할 수 있도록 협력적인 자세를 보이며 자신의 개입을 점점 줄이고, 학습자가 스스로 더 깊은 사고에 몰두할 수 있도록 스스로에게 해야 할 질문의 전형을 보여주는 모델링 활동 등을 통해 고차적인 사고를 유도할 수 있는 코치로서 학습을 안내해야 한다(Hmelo-Silver, 2004; Hmelo-Silver & Ferrari, 1997). 마지막으로 다섯 번째는, 협업을 통한 그룹 활동이 필수적이라는 것이다. 학습자들이 서로의 생각과 의견을 공유하고 비교하며 함께 해결책을 모색해보는 동안 커뮤니케이션 역량과 함께 자신이 보유하지 못한 다른 관점에 대해 생각하며 결과론적으로는 더욱 폭넓은 이해력을 끌어올리게 된다(Brush & Saye, 2000; Savery, 2006). 따라서 교수자는 원활한 학습을 위한 나름의 준비와 예상되는 상황에 대응할 수 있는 역량을 보유하고 있어야 한다.

이와 같은 논의를 바탕으로, PBL을 기반으로 한 다양한 모형들이 있다. 본고에서는 초등학생 대상의 수학적 창의성 교수-학습이 이루어진다

는 점을 미루어, Lambros(2002)의 모형과 허난과 강옥기(2010)의 모형을 제시하고자 한다. 먼저, Lambros(2002)의 모형은 초중등학교에 PBL을 적용하기 위해 ‘문제 접하기 → 목록화 하기 → 해결책 작성하기’의 순서를 제시하였다.

〈표 Ⅳ-1〉 Lambros(2002) PBL 모형의 목록화 하기와 해결책 작성하기

<table>
<tr><th colspan="2">사실</th><th colspan="2">알 필요가 있는 것</th><th colspan="2">학습문제</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="3">가능한 해결책</th><th colspan="3">새로운 학습문제</th></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

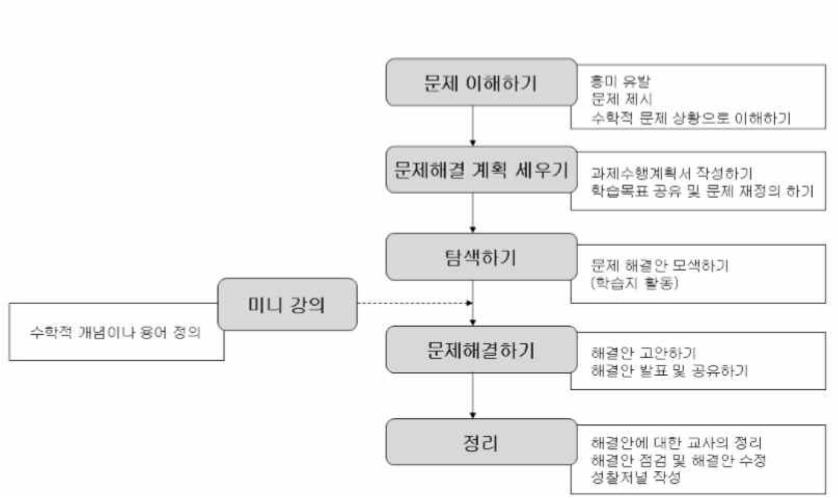
조연순 외(2004)의 설명을 통해 이를 더 자세히 살펴보면, 먼저 ‘문제 접하기’에서 학습자는 그룹을 나누어 다양한 방법으로 문제의 시나리오를 접한다. 이때, 학습자 주도의 형태를 고수하기 위해 문제는 언제나 학생이 읽는다. ‘목록화 작업’은 문제 해결을 위한 과정을 준비하는 과정으로서 ‘사실’, ‘알 필요가 있는 것’, ‘학습문제’로 나누어 항목별로 정리한 것이다.

‘사실’은 문제에 대하여 아는 것이 무엇인지를 확인해보는 것이며, ‘알 필요가 있는 것’은 문제를 더 잘 이해하고 해결에 도움이 되는 정보를 목록화하는 것이다. 다음으로 ‘학습문제’는 앞의 목록으로부터 문제 해결을 위해 탐구할 필요가 있는 것에서 학습문제를 도출하는 것을 말한다. 마지막으로 ‘해결책 작성하기’는, 문제 해결 방법에 대한 아이디어에서 학습 문제를 이끌어내고, 해결책의 수용과 배제를 위한 정보를 정리하는데 사용된다. 다른 PBL 모형에 비해 제시된 모형은 비교적 간단한 측면이 있지만, PBL에서 중시하는 문제 해결과 이를 통한 학습

문제 도출을 위해 학습자가 다양한 정보를 스스로 유목화하고 작성하는 것에 큰 의미가 있다고 볼 수 있다.

또 다른 PBL의 모형 중 수학 교과만의 특성을 살려 PBL 학습 모형을 개발한 허난과 강옥기(2010)의 모형이 있다. 허난과 강옥기(2010)는 수학과 PBL 학습 모형을 제시하고, 이를 구체화하기 위하여 직접 수업을 실시하여 아래의 [그림 Ⅳ-1]과 같은 수학과 PBL 학습 모형을 더욱 구체화하였다.

[그림 Ⅳ-1] 수학과 PBL 학습 모형(허난과 강옥기, 2010)



e-PBL

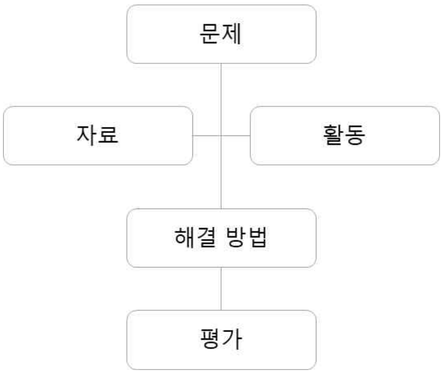
앞서 살펴보았듯 PBL은 학습자가 직접 지식을 습득하는 과정을 주도하고, 문제를 해결하며 스스로 학습의 과정을 면밀하게 살펴볼 수 있는 특징을 지니고 있다. 이와 같은 과정을 위해 교수자는 학습자가 지식을 구조화할 수 있는 비구조화된 문제를 구성하고, 발생할 수 있는 다양한 상황에 대한 이해를 바탕으로 적절한 스케폴딩과 개입을 준비해야 한다. 더불어, PBL에서는 학습자와 교수자가 상호작용하는 과정을 매우 중시하는데, 전통적인 면대면 수업의 물리적 제약을 극복하고 더욱 효과적으로 유의미한 커뮤니케이션을 진행할 수 있는 e-PBL에 대한 연구가 진행되고 있다.

장정아(2005)는 e-PBL 또한 PBL과 마찬가지 교수자에게 과중된 역할이 부여되기는 하지만, 학습자의 상호작용과 교수자의 인지적 코칭이 온라인에서 이루어지면 더욱 효과적으로 학습의 과정이 구조화될 수 있다고 피력하였다. 또한 박성희(2009)는 PBL 수업이 지닌 시간적 제약을 e-PBL에서 어느 정도 극복할 수 있으며, 학습자들이 글이나 말로만 진행되던 학습에서 다양한 매체를 활용하여 좀 더 현실적인 학습을 진행하면, 향후 실제 문제를 접했을 때 문제 해결에 대한 전이를 높일 수 있다고 주장하기도 하였다. 더불어 Saye와 Brush(2002)가 주장한 소프트 스캐폴딩(soft scaffolding)과 하드 스캐폴딩(hard scaffolding)이 있는데, 소프트 스캐폴딩은 교수자가 학습자의 이해정도를 지속적으로 분석하면서 적절할 때 도움을 제공하는 활동이며, 하드 스캐폴딩은 이와 같은 장치가 프로그램 안에서 제공되고 있는 것으로 교수자의 소프트 스캐폴딩의 연장선과 같다고 설명하였다. 즉, e-PBL에서도 PBL과 마찬가지로 교수자의 끊임없는 노력이 요구된다.

테크놀로지의 발달과 더불어 e-PBL 또한 다양한 모형과 사례를 통해 발달하고 있는 모습을 확인할 수 있다. 본 연구자는 그중에서도 개별화한 형태의 PBL을 지향하면서, e-PBL 기획자에게 도움을 주기 위해 기획

된 Malopinsky, Kirkley, Stein, & Duffy(2000)가 제한한 온라인 PBL 교수 설계모형을 제시하고자 한다. Malopinsky 외(2000)는 Barrows와 Mayers(1993)의 전통적인 PBL 모델과 상당히 유사하다고 설명하였으며, 다섯 가지의 영역으로 모형을 구축하였다. 이는 아래의 [그림 Ⅳ-2] 와 같다.

[그림 Ⅳ-2] Malopinsky, Kirkley, Stein, & Duffy(2000)의 e-PBL 모형



e-PBL의 가장 큰 강점은 물리적 제약을 넘어 학습이 이루어질 수 있도록 하고, 오프라인 학습에 비하여 풍부하게 학습자원을 손쉽게 접근할 수 있기에 더욱 향상된 학습 효과를 기대할 수 있다는 것이다. 강인애와 진선미, 여현숙(2014)은 이러한 논의에서 더 나아가 e-PBL의 학습 효과를 분석하였는데, 이는 <표 Ⅳ-2>와 같다. 지금까지 구성주의와 이를 기반으로 한 PBL, 그리고 e-PBL에 대해 알아보았다. 본고는 이를 바탕으로 하여 연구 목적에 적합한 교수-학습 설계 방안을 마련한 뒤, 이를 실제로 적용하고자 하였다. 관련된 논의가 다음 장부터 이어진다.

〈표 Ⅳ-2〉 e-PBL의 학습효과(진선미, 여현숙, 2014)

학습효과	특징
자기주도력	-학습자의 시각, 관점, 경험 속에서 과제를 해결함으로써 자기주도력 함양 -탐구 활동, 내용분석, 해결안 제시의 과정을 학습자 주도적, 자율적으로 진행
문제해결력 및 비판적 사고력	-과제(문제) 분석, 해결에 필요한 학습과제 선정, 학습정보와 자료의 탐색·수집·적합성을 판단하는 과정에서 문제해결력이 증진됨 -타인의 견해와 자신의 생각을 비교 분석하며 문제 해결안을 구체화하는 성찰적 사고를 통해 비판적 사고력 함양
의사소통력 및 협동학습력	-문제 해결을 위해 모둠 활동에 참여하며, 해결 과정 속에서 의사소통능력 및 협동학습력 강화
테크놀로지 활용력	-문제 해결을 위해 하나의 학습도 구이자 학습환경으로서 테크놀로지를 활용 -다양하고 새로운 테크놀로지와의 접목을 전제로 하며, 자연스럽게 증진
학습 성취도	-주어진 과제해결을 위한 인지적 노력을 기울이며, 노력의 결과는 학습성취도로 이어짐

Ⅴ. 수학적 창의성 향상을 위한 교수-학습 설계와 적용

실행식을 기반으로 하는 본 프로그램은 구성주의를 기반의 e-PBL 하여 교수-학습 설계를 논의하였다. 실행식이 구성주의의 철학을 바탕으로 하여 개발되었기 때문에 자연스러운 맥락을 추구할 수 있었기 때문이다. 더불어 추후 수학화를 통해 학습자가 나름의 수학적 의미를 추구해나가는 과정을 분석하고자 하는 논의와도 함께할 수 있는 여지가 충분했다. 본 장에서는 실행식 학습 환경에서 수학적 창의성을 계발할 수 있는 교수-학습 설계 방안과 평가 방법에 대해 논의한 후, 실제 데이터를 통해 위의 방안을 적용해보고자 한다.

1. 수학적 창의성 향상을 위한 교수-학습 설계

1.1 교수-학습 설계 모형

본고는 수학적 창의성 함양을 위해 실행식 기반의 학습 환경에서 학습자들이 다양한 문제를 해결하고 이를 평가하려는 목적을 지니고 있다. 따라서 직전에 논의한 PBL과 e-PBL의 여러 가지 모형을 적절히 융합하여, 본고의 목적과 연구의 특징을 잘 살릴 수 있는 '수학적 창의성 함양을 위한 e-PBL' 교수-학습 모형을 구축하고자 한다. 이 교수-학습 모형은 실행식의 기본 표현 체계를 학습한 초등학교 고학년과 중학교 1, 2 학년에게 문자 활용 역량을 고취시킬 수 있는 효율적인 모델이 될 것이라 기대한다. 특히, 실행식 기반의 학습이 이루어진다는 점을 염두에 두어, 구성주의와 테크놀로지의 장점을 최대한 흡수할 수 있는 형태의 교

수-학습 모형을 설계하고자 한다. 구성주의와 컴퓨터를 비롯한 공학 기술은 학습자의 적극적인 참여를 이끌기 위해 필요하다(Perkins, 1991). 구성주의 철학에 입각하여, 구성주의 학습 환경에서 학습자는 교수자가 제시하는 풍성한 사례와 문제를 통해 다양한 관점에서 지식에 접근하고 이를 해석하게 된다(김신자, 2001). 지금까지 살펴본 여러 선행 연구와 구성주의 교수-학습 설계 모형을 바탕으로, 본고에서 제시하는 교수-학습 모형은 아래의 표와 같다.

<표 Ⅴ-1> 교수-학습 모형

<table>
<tr><td rowspan="3">학습 자료
및 활동 ↔</td><td>문제 이해</td><td rowspan="3">↔ 피드백</td></tr>
<tr><td>전략 수립</td></tr>
<tr><td>문제 해결</td></tr>
<tr><td colspan="3">분석 및 평가</td></tr>
</table>

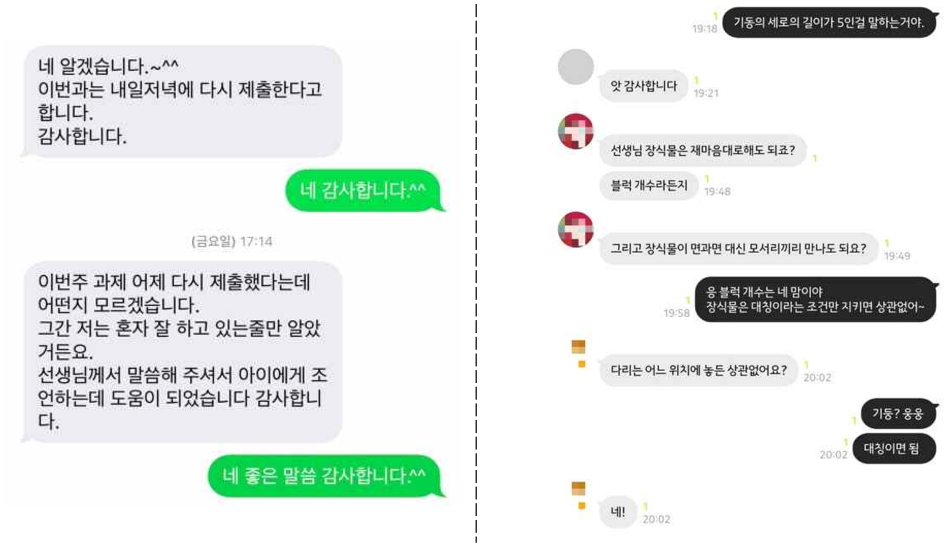
교수-학습 모형에 대해 자세히 살펴보자면, 먼저 ‘학습 자료 및 활동’이란 학습의 전 과정에 활용할 수 있는 교육 자료 및 예제 등을 의미한다. 본 프로그램은 학습자들에게 온라인 교육, 사전에 배포한 교재, 교과서 등을 학습의 전 과정에 활용할 수 있음을 안내하였으며, 온라인 교육의 경우 추후 문제풀이에서 응용할 수 있는 관련 예시를 충분히 반영할 수 있도록 구성하였다. 특히, 온라인 교육은 교사이자 수학교육 석사 과정인 3인의 의견으로 기획 및 수정이 이루어졌다. 또한 문제 이해의 오류를 최대한 방지하고자 움직이는 이미지 파일 등을 활용하여, 이해 역량이 부족한 학습자가 문제 설계 과정을 동시적으로 이해하고 따라할 수 있도록 구성하였다. Okolo(1993) 외는 개별화되고 적절하게 설계된

교수가 컴퓨터를 통해 제공되면 학습자의 주의집중력이 강화되고, 과제 참여 시간이 증가한다고 주장했다. 이와 같은 효과는 교수 이외의 상황으로까지 전이되어, 자아개념과 자기효능감을 향상시키고 사실적인 경험에 접근할 수 있는 기회를 제공한다(Johanson, 1997, Okolo, 1993; 권용덕, 장혜성, 2012, 재인용). 다음으로 '피드백'은 학습자가 교수-학습의 전 과정에서 의문이 생기는 점이나 어려움을 느끼는 점을 해결할 수 있도록 적절한 반응이나 답변을 주는 것이다. [그림 Ⅴ-1]과 같이 문자메시지나 SNS 채팅을 적극 활용할 수 있도록 사전에 이를 고지하고, 질문에 대해 보호자와 학습자 모두가 연구자와 대화를 이어갈 수 있도록 환경을 구성하였으며, 필요한 경우 학부모와 유선으로 대화를 진행하기도 했다.

앞서 제시한 모형에서 '학습 자료 및 활동'과 '피드백'은 중간에 제시된 교수-학습의 직접적인 흐름에 계속해서 작용하는 것으로 표현되어 있는데, 전자의 경우 학습자가 다양한 자료와 예시를 활용하여 문제에 접근하고 활용할 수 있음을, 후자의 경우 교수자의 피드백이 교수-학습의 전 과정에 걸쳐 이루어진다는 점을 강조하기 위함이다. 특히, 구성주의에서 강조하는 학습자가 다음 단계로 나아가기 위한 장치인 '비계(Scaffolding)'으로도 작용될 수 있도록, 문제와 연관성이 높은 학습 활동을 제시하고 문제의 짜임을 구성하였다. 다음으로 교수-학습의 직접적인 흐름인 '문제 이해', '전략 수립', '문제 해결' 단계의 경우 수학교육 전문가 1인, 교사이자 석사 과정인 3인의 검토를 통해 여러 차례 수정된 연구 문제를 통해 이루어졌다. 수학화 상황에서 수학적 창의성을 발휘할 수 있도록 구성한 연구 문제의 경우 다음 절에서 상세히 다루어질 것이다. 위에 언급된 문제 이해와 전략 수립, 문제 해결 단계의 경우 앞서 진행한 학습 자료와 활동, 교수자와 학습자 간의 피드백을 활용할 수는 있다. 그러나 전적으로 학습자 개인이 문제 상황을 명확하게 이해하고 이를 위한 전략을 다방면으로 고려한 뒤, 문제 해결에 적용해야 한다는 점이 본 교수-학습 모형의 특징이다. 즉, 학습자 개인의 자발적 참여와 과제 집착력이 상당 부분 요구된다. 연구의 적용 단계에서 학

습자가 제시된 문제의 조건에 의문을 표시한 경우, 문제 조건을 수정해 더욱 상세히 작성하는 등 학습자의 이해를 돕고자 하였다. 마지막으로 ‘분석 및 평가’ 단계에서는 학습자가 연구 문제에 대해 제출한 최종 실행식과 수학화 과정을 관찰하기 위한 실행식의 데이터를 순차적으로 분석한다.

[그림 V-1] 연구자와 보호자, 학습자 간 피드백 상황



1.2 연구 문제

문제 설명

연구자가 제시한 문제 ‘실행식으로 다리 만들기’이며, 총 4개의 영역으로 나누어진다. 이를 먼저 표로 간단히 정리하면 다음과 같다.

<표 Ⅴ-2> 연구 문제

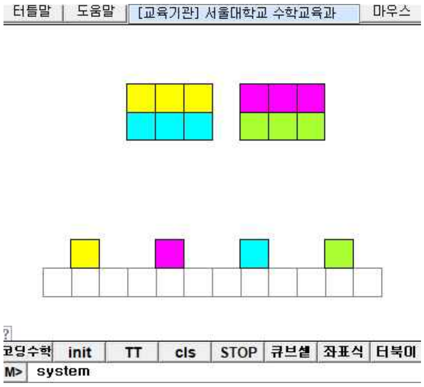
단계	내용
1단계	타일로 다리에 올릴 대칭형의 장식물 만들기
2단계	자신이 만든 장식물을 길이 12인 상판 위에 올리기
3단계	길이가 36인 다리 만들기
4단계	문제 풀이 전략 확인 및 3단계의 실행식 최소화

첫 번째는 16개의 타일로 다리에 올리는 장식물을 총 4개 만드는 문제로, 교수자가 제시한 화면을 활용해 타일을 드래그 앤 드롭하여 다리 위에 올릴 대칭형의 구조물을 디자인하는 것이다. 먼저, 지나친 단순함과 비대칭의 오류를 막기 위해 서로 다른 4개의 색의 타일을 각 4개씩 제시하였다. 특히, 학습자가 자신이 만들고 싶은 다리를 디자인해보는 경험을 부여하기 위해 이와 같은 단계를 도입하였으며, 문제 접근의 어려움을 방지하고자 다양하고 독창적인 구조물을 만들 수 있도록 여러 가지 다리 사진을 함께 첨부하였다. 또한, 문제의 조건에 대해 최대한 상세히 언급하였으며, 교수자의 예시를 게시하였다. 첫 번째 문제의 조건을 요약하면 다음과 같다.

① 16개의 타일을 모두 활용하여, 다리에 올릴 장식물 만들기.
② 장식물은 일반적인 다리의 형태로서 가운데 대칭이어야 함.
③ 서로 다른 장식물 3개를 만들어서 제출해야 함.

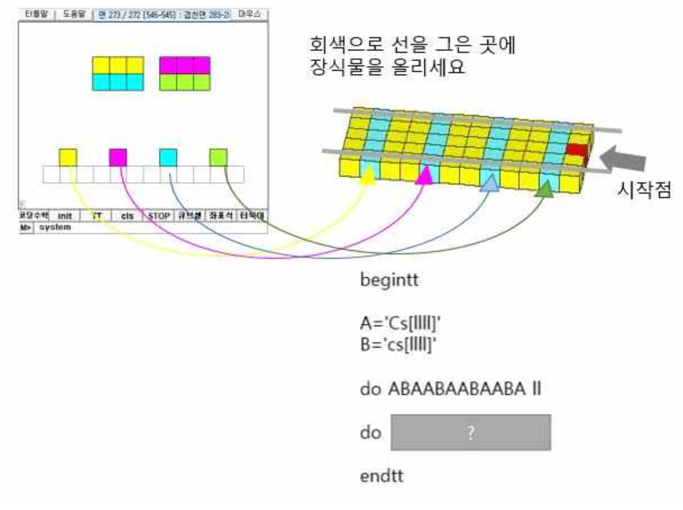
이와 같은 1단계의 문제를 해결하기 위한 학습 환경은 아래의 [그림 Ⅴ-2]와 같다.

[그림 Ⅴ-2] 1단계의 문제 해결 환경



다음으로 2단계는 자신이 만든 장식물을 가로의 길이가 12인 상판 위에 올려보는 것이다. 교수자는 사전에 가로의 길이가 12인 다리의 상판을 제시하였다. 1단계에서 만든 장식물을 단순히 상판의 가로에 위, 아래로 각각 올려보는 것인데, 이때 실행식의 최소화를 유도하기 위해 교수자 또한 압축된 형태의 단순한 상판 실행식을 제공하였다. 아래의 그림은 문제에 제시된 설명의 일부를 제시한 것이다.

[그림 Ⅴ-3] 2단계 문제의 일부



위의 그림과 같이 상판 실행식을 제시하고, 물음표 다음에 작성하는 실행식의 시작 지점까지 지정하여 자신이 1단계에서 디자인한 장식물을 상판 위에 올리는 것 이상의 활동은 지양할 수 있도록 문제를 구성하였다. 연구 참여자들이 실행식의 기본적인 표현 체계를 학습하고 있었기 때문에, 지난 학습을 상기하는 동시에 1단계 문제의 조건을 지켜서 해결했는지를 확인할 수 있는 기회를 부여하기 위함이었다.

다음으로 3단계는 본격적으로 다리의 상판을 3배 늘려, 최종적으로 다리를 완성해나가는 단계이다. 이전 단계에서 상판의 길이가 12였으니, 3단계에서는 상판의 길이 36인 다리가 된다. 3단계는 학습자가 2단계에서 사용한 명령어를 활용해 자연스럽게 반복이나 치환 명령 적용하도록 유도하고 기회를 부여하기 위해 설정하였다. 또한, 장식물을 디자인하는 단계는 따로 부여하지 않고, 지난 단계를 활용하도록 지시하였다. ‘실행식으로 다리 만들기’라는 최종 목표의 맥락을 감안하면, 1단계와 2단계의 경우 교수-학습 모형에서 전략 수립에 해당한다고도 볼 수 있다. 또한, 이전 단계에서는 디자인한 장식물을 상판에 올리기만 해도 되었으나, 길이를 늘리게 되면서 장식물을 어떻게 변화시키고, 장식물과 기둥의 대칭을 어떻게 유지할지를 고민해야 한다. 더불어, 교수자는 2단계부터 문제 풀이 과정에서 반복해서 식을 최소화할 것을 요구하였다. 3단계의 실행식은 최종 완성형으로 제출할 것을 미리 제시했기 때문에, 이 실행식의 변화 과정을 분석하면 학습자가 어떠한 수준 상승을 통해 수학적 의미를 실현하고, 식을 줄이기 위해 수학적 창의성을 발휘했는지를 면밀하게 살펴볼 수 있다.

마지막으로 4단계는 3단계에서 식을 줄이며 수학적 의미를 추구하고 창의성을 신장시킬 여지가 부족했던 학습자를 위해 제시한 것이다. 이 과정에서 연구자는 다음과 같은 질문을 문제로 추가하여 학습자에게 자신의 문제 해결 전략을 반추할 기회를 제공하였다.

① 상판을 어떻게 늘렸나요?

② 장식물과 기둥을 어떻게 만들었나요?

③ 다리의 대칭을 유지하기 위해 어떻게 했나요?

이와 같은 질문을 통해, 학습자는 어떠한 생각으로 다리를 만들었는지를 되짚어보게 된다. 즉, 자신이 만든 다리와 그 실행식이 어떠한 구조를 지니고 있는지, 그리고 어떻게 해야 더욱 압축적이고 추상화 단계가 높은 실행식을 만들 수 있는지를 고민해볼 수 있다. 또한, 연구자는 치환이나 반복이 아직 미숙한 학습자를 위해 비계로서 이에 대한 복습과 연습 문제를 제공하기도 하였다. 이 과정은 실행식 작성 단계에서 혹시 모르게 발생했을 오류나 실수를 잡아낼 수 있는 기회와 더 깊은 수학화 단계로 도약할 수 있는 여유를 부여한다. 수학화 수준의 비약을 위한 여유는 수학적 창의성이 발현될 수 있는 기회라는 논의는 앞서 다양하게 진행되었으므로 생략한다.

최소 명령어를 통한 수학적 의미 발견

실행식에서 식을 최소화한다는 것은 크게 세 가지로 나누어지는데, 앞서 살펴본 실행식의 특징인 계수와 반복 명령, 치환 명령을 활용하는 것이다. 앞서 살펴보았듯, 실행식에서 사용되는 명령어는 대수에서 사용되는 수학적 언어와는 다소 차이를 보이나, 공통적으로 식을 가장 짧게 쓰는 것, 즉 실행식 코드를 작성할 때 키보드를 가장 적게 쓰는 것과 관련이 있다. 정진환(2015)은 만들기 활동에서 학습자는 더 편리하고 효율적인 표현 방법을 원한다고 주장하며, 패턴과 관련된 그림을 제시하고 이를 최소의 코드로 구성하라 지시하였다. 그리고 이를 '최소 표현 게임(Minimum expression game)'이라 제시하였다. 또한, 최소의 코드를 사용하라는 제한 반복되는 부분을 문자로 치환하여 표현하는 활동을 요구하며, 이는 구조물에서 패턴을 발견하고 효율적으로 표현하는 역량을 향

상시키는 목적이라 설명했다.

언급한 선행연구의 경우, 문자 치환을 강조하여 계수나 반복 명령은 부수적으로 논의한 경향이 있다. 또한, 사용된 코드의 개수를 세어보게끔 유도하여, 실행식 문자 치환을 강조하였다. 본고에서는 여기에서 더 나아가 실행식을 압축하는 과정에서 수학적 의미를 발견하는 수학화를 관찰하고자 하므로, 문자 치환만이 아닌 실행식 문자 속에 담겨있는 수학적 의미를 모두 고려하고자 한다. 물론, 최소 명령어의 사용이 담고 있는 패턴 학습의 장점은 충분히 흡수하여, 학습자가 치환 문자를 자연스럽게 사용할 수 있도록 3단계에서 2단계와는 다른 상판의 길이를 제시하였다. 연구자는 앞서 언급한 숫자 계수와 반복 명령, 치환 명령을 중심으로 학습자가 작성 3단계와 4단계의 실행식을 통합적으로 분석할 것이다. 4단계의 경우 3단계 실행식과 다른 내용을 지니고 있는 것이 아니고, 형식이 발전하는 과정을 포함하고 있으므로 종합하여 언급하고자 한다. 더불어 수준 상승에 의거한 수학화를 고려하기 위해, 실행식 활용 수준을 분석의 준거로서 제시하고자 한다.

2. 사례 적용

2.1 연구 자료 수집

본 연구는 시흥시와 서울대학교 사범대학이 관학 협력을 통해 운영하는 ‘창의 코딩 멘토링’프로그램의 학습자들을 대상으로 한 과제물을 관찰한 것을 기반으로 하였다[8]. 연구 참여자의 경우 프로그램에 참여하고 있는 학생들을 대상으로 하였으며, 연구자는 연구 윤리의 절차에 따

8) ‘창의 코딩 멘토링’에서는 실행식을 기반으로 창의성과 사고력을 증진 시키는 코딩 수학 프로그램을 운영하고 있다. 교수자의 설명과 이미지, 영상 등을 통해 온라인에서 주당 1회씩 교육이 이루어진다.

라 연구 참여자 모집을 실시한 뒤 연구 참여에 동의를 완료한 학습자 20명의 과제물을 연구의 데이터로 활용하였다. 창의 멘토링 프로그램은 약 1주일 동안 1개의 온라인 교육과 과제물이 제시된다. 학습자들은 실행식에 대한 사전 지식은 없는 상태이며, 프로그램에 참여하며 사전에 기획된 교육과정 및 내용에 따라 실행식 교육을 습득하고 과제물을 제출하고 있다. 본 프로그램은 학습자가 주어진 교육을 성실하게 학습한 후, 이에 따라 실행식 기반의 쌓기나무 산출물을 만들어가는 것을 근간으로 하며, 전반적으로 학습자 중심의 교수-학습 방법을 취하고 있다.

2.2 연구 참여자

연구에 참여한 학생들은 초등학교 6학년 학생 총 20명이며, 4월 중순부터 진행된 온라인 교육에 성실하게 참여한 동시에 법정대리인과 함께 연구 참여를 동의한 학생들을 대상으로 진행하였다. 연구자는 실행식 데이터를 비롯하여 학생들이 제출한 온라인 과제의 답안을 수집하였다. 본 프로그램의 경우 보호자나 학습자의 직접적인 의지로 신청한 것이기 때문에, 대부분이 적극적으로 프로그램의 교육에 참여하는 모습을 보였다. 연구자는 온라인 학습 환경(www.javamath.com/class)과 SNS를 활용하여 학습자들의 학습 전 과정에 적극적으로 참여하였다. 또한, 온라인 교육과 과제의 시작 시점과 종료 시점을 SNS나 문자메시지 등의 수단을 통해 주 1~2회 이상 수시로 안내받았으며, 문제 해결 과정이나 연구 참여와 관련해 궁금한 점이 있을 경우에는 자유롭게 질문할 수 있도록 기재하였다. 특히, 연구와 무관한 참여자들도 동일하게 프로그램과 제반 사항을 제공받아 이질적인 처치를 가하지 않도록 주의를 기울였다.

3. 사례 분석

본 절에서는 앞서 살펴본 교수-학습 설계와 이를 기반으로 구성한 문제를 적용하여, 학습자들이 어떻게 문제를 해결하는지 그리고 그 과정 속에서 어떻게 수학화를 창조하고 수학적 창의성을 발휘해가는지를 살펴보고자 한다. 앞서 언급했던 문제의 단계에 따라, 1단계와 2단계, 3∼4단계의 답안을 각각 분석할 것이다.

3.1 분석 절차 및 방법

앞서 살펴본바와 같이, 본고에서 제안한 문제는 단계 간 유기성과 연결성이 짙은 구조를 지니고 있다. 1단계와 2단계의 경우 결국 3단계에서 높은 수학화 단계로 비약하기 위한 준비 단계라고 볼 수 있으며, 4단계의 경우 3단계에서 미처 생각하지 못한 부분이나 실수를 바로 잡는 단계이다. 1단계 분석의 경우 설정한 교수-학습 환경이 학습자의 창의성을 도모할 수 있는 기회를 부여했는지의 여부를 논의할 것이다. 따라서 학습자들이 자유롭게 자신이 만들고 싶은 다리의 장식물을 만들 수 있었는지의 여부를 판단해보고자 한다. 2단계의 경우 추후 단계를 평가하기 위해 학습자가 실행식의 기초 개념을 잘 이해하는지를 확인하는 것에 중점이 있으므로 준비 단계로서 이해한다. 즉, 더 높은 추상화 단계를 위한 기초 작업으로, 학습자가 추후 수학적 창의성을 발휘하여 더 높은 수학화 단계로 나아가기 위한 전초 단계에 해당된다.

다음으로 3단계와 4단계의 경우, ‘과정적 산출물’과 ‘결과적 산출물’로 나누어 논의하고자 한다. 이종희와 김기연(2010)은 창의적 산출물에 대한 논의를 종합한 결과, 창의적 산출물과 창의적 수행 과정은 동시에 강조되어야 하는데 이는 과정으로서의 산출물과 결과로서의 산출물은 서로 영향을 끼치는 관계에 있기 때문이라고 설명했다. 즉, 수학적 창의

성의 증진을 위한 교육 이후, 이에 대한 산출물은 과정과 결과가 동시에 분석될 필요가 있다는 논의와도 연결된다. 본고에서는 과정적 산출물의 경우, 학습자의 실행식 로그 데이터를 통해 수학적 의미를 구현해 가는 과정을 분석하였다. 그리고 결과적 산출물은 학습자의 최종 실행식과 다리 그림을 전문가 집단에 제공하여 분석을 진행하였다. 이는 평가가 일반적으로 추구하는 객관성을 확보하는 동시에, 객관성으로 인해 학습자가 쌓은 수학화 과정이나 수학적 창의성을 간과할 수 있는 우를 범하지 않기 위한 노력의 일환이다. 즉, 일반적인 평가 방법이 가지고 있는 결함을 종합하여 분석의 타당성을 높이려는 의도를 지니고 있다. 이와 같은 각 단계별 분석 절차를 정리하면 아래의 <표 Ⅴ-3>과 같다.

<표 Ⅴ-3> 분석 절차 및 방법

<table>
<tr><th>단계</th><th colspan="2">방법</th></tr>
<tr><td>1단계</td><td colspan="2">장식물의 유형과 개수</td></tr>
<tr><td>2단계</td><td colspan="2">실행식으로의 이행 확인</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 ~ 4단계</td><td>결과 분석
(전문가 집단)</td><td>최종 실행식과 산출물에 대한 결과물 분석</td></tr>
<tr><td>과정 분석
(연구자)</td><td>수준 상승에 따른 수학화 과정 추적</td></tr>
</table>

3.2 1 ~ 2 단계 분석 결과

앞서 살펴본 바와 같이 1단계는 다리에 올릴 장식물을 자유롭게 만들어보는 단계로서, 학습자는 자신이 만들고 싶은 다리를 디자인하고 창의적인 사고를 발현시킬 수 있는 기회를 가지게 된다. 피험자 모두에게 각

3개씩 장식물을 디자인하도록 지시하였으며, 20명 중 미제출자인 4명을 제외한 16명의 피험자로부터 도출된 장식물의 유형은 오류를 제외하고 총 39개로 확인되었다[9]. 각 피험자가 제출한 유형은 아래의 표와 같다.

피험자가 제출한 장식물을 분석한 결과, 총 39개의 유형 중 7개인 2, 4, 9, 14, 17, 20, 31번 유형을 제외한 나머지 32개의 유형은 모두 다른 디자인이 도출되었다. 앞서 설명한대로 1단계에서는 대칭성을 지키는 것이 핵심인데, 대칭성의 경우 5학년 수학 교과에서 선수 학습되었기 때문에 대다수의 학습자가 큰 무리 없이 문제를 해결하였다. 1단계의 문제를 분석한 결과 분석에서 모든 피험자가 다른 피험자와 동일하지 않은 1개 이상의 장식물 디자인을 제출하였다. 이는 제시한 학습 환경이, 피험자가 자신이 독창적으로 구상한 디자인을 실현할 수 있는 매개체가 된다는 것을 드러낸다. 또한, 다양한 답안이 도출된 것으로 보아 제시된 문제가 다방면으로 생각을 이끌어낼 수 있는 기회가 되었음을 살펴볼 수 있다. 앞서 언급한 것처럼, 1단계의 경우 본격적으로 다리 만들기를 통해 문제를 해결하는 단계라기보다는 문제 해결의 토대를 만들어가는 단계로써 구성되었다. 위의 분석으로 보아, 본 단계가 학습자의 사고력을 확장시키고 이를 위해 창의성이 개입될 수 있는 여지를 부여했음을 추측할 수 있다.

다음으로 2단계는 1단계에서 디자인한 장식물을, 제시된 상판 위에 올리는 단계이다. 이 단계의 경우, 고차적인 단계의 실행식 체계를 적용하지 않더라도 기본적인 실행식만으로 주어진 문제를 충분히 해결할 수 있다. 특히, 자신의 생각을 명시적으로 확인하고 실행식의 기초 체계를 다시 한 번 음미하는 단계로 삼을 수 있도록 상판 실행식과 시작점을 제공하여 사고의 단계를 단순화할 수 있도록 구성하였다.

9) 장식물을 다리의 구조를 고려해 대칭 형태로 구상할 것을 여러 번 고지하였다. 그럼에도 불구하고, 대칭 개념이 익숙하지 않았던 학습자가 양성한 오류는 유형에서 제외하였다.

<표 Ⅴ-4> 1단계 장식물의 유형

39																o	1
38																o	1
37																o	1
36															o		1
35															o		1
34														o			1
33														o			1
32													o				1
31												o			o		2
30												o					1
29												o					1
28											o						1
27											o						1
26										o							1
25									o								1
24									o								1
23									o								1
22								o									1
21								o									1
20								o		o							2
19							o										1
18							o										1
17							o			o							2
16						o											1
15						o											1
14					o	o											2
13					o												1
12				o													1
11				o													1
10				o													1
9			o								o						2
8			o														1
7			o														1
6		o															1
5		o															1
4		o			o												2
3	o																1
2	o													o			2
1	o																1
유형 / 피험자	S1	S2	S3	S4	S6	S7	S 10	S 11	S 12	S 13	S 14	S 16	S 17	S 18	S 19	S 20	합계

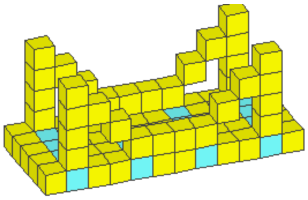
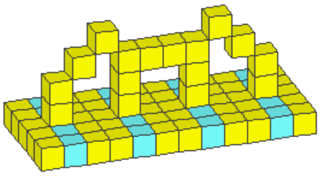
따라서, 주어진 실행식에 지난 단계에서 구성한 장식물을 올려보는 작업만을 소화하면 되므로, 실행식의 기본 체계만 이해하고 있다면 높은 난이도를 지닌 문제는 아니다. 2단계의 경우 20명의 피험자 모두가 제출하였다. 그러나 앞서 1단계에서부터 대칭 오류를 지니고 있던 피험자가 2단계에서도 실수를 범하였으며, 어떤 피험자는 문제를 온전히 숙지하지 못하여 문제에 제시된 바와 다르게 장식물을 배치하는 오류를 포함하여 과제를 제출하였다. 관련된 내용을 아래와 같이 표로 정리해보았다.

<표 Ⅴ-5> 2단계 제출 유형

유형	해당 피험자
정답	17 (S1, S2, S3, S5, S6, S7, S9, S10, S11, S12, S13, S14, S15, S16, S18, S19, S20)
문제 인식으로 인한 오답	1 (S4)
비대칭으로 인한 오답	2 (S8, S17)

예상한바와 같이, 20명 중 17명에 해당하는 피험자가 큰 무리 없이 2단계 문제를 수행하였다. 오답의 유형은 앞서 언급한 것처럼 문제 인식과 비대칭의 오류에서 발생하였다. 먼저, 문제 인식으로 인해 오답을 제출한 S4 피험자는 문제에서 요구한 바와 달리, 아래의 표와 같이 장식물을 다리의 양 끝이 아닌 중간 부분에 배치하는 오류를 양성하였다. 앞서 제시한 바와 같이 교수자가 장식물을 올려야 할 상판의 양쪽 끝을 회색 선분으로 표시하였고, 관련 내용을 명시하였음에도 불구하고 문제 상황을 명확하게 인지하지 못한 것으로 예상된다.

〈표 Ⅴ-6〉 2단계 피험자의 정답과 오답 예시

정답	오답
	

다음으로 비대칭으로 인한 오답은 2명의 피험자에게 발생하였는데, 이 중 S17 피험자의 경우 앞서 1단계에서 3개의 디자인 중 1개를 제외하고 모두 대칭 오류를 범하여 이것이 2단계에까지 영향을 미쳤다. S8 피험자 또한 마찬가지로 비대칭과 관련한 오답을 제출하였다. 또한, 대칭을 올바르게 한 답변의 경우 1단계에서 제시한 장식물을 꾸밀 수 있는 쌓기나무의 개수와는 다르게 장식물을 구성하였다. 이는 1단계 문제가 의도한 것을 충분히 흡수하지 못한 채 단계를 뛰어넘었기 때문에, 오류를 발생시켰음을 추측할 수 있다. 즉, 자신이 발현한 창의적인 사고를 확인하는 단계를 거치지 못하고 적용하는 단계로 넘어갔기 때문에, 오류를 스스로 잡아내지 못했던 것으로 해석할 수 있다.

3.3 3 ~ 4단계의 결과 분석

분석 절차 및 방법에서 언급한 바와 같이, 3단계와 4단계는 전문가 집단의 분석과 연구자의 분석을 나누어 진행한다. 이는 연구 전반을 기획하여 문제가 의도하고 있는 바를 상세히 알고 있는 연구자와 시선과 좀 더 객관적인 분석을 마련해줄 전문가의 시선을 종합하여, 분석의 객관성을 확보하는 동시에 창의성이 지니고 있는 주관적인 기준을 동시에 충족

하고자 하는 목적을 지니고 있다. 이 전문가 집단은 본 연구가 이루어진 프로그램의 공동 연구자로, 연구자와 함께 프로그램을 이끌고 있다. 본 연구와는 무관하게, 프로그램에는 학기 과정에 대한 분석과 채점이 요구되며, 본고에서는 그 중 일부를 가져왔다. 즉, 산출물의 결과 분석은 전문가 집단이 분석한 결과물을 반영하였으며, 과정 분석은 수준 상승에 의거하여 연구자가 홀로 분석하였다.

산출물의 결과 분석 (1)

앞서 제시한 프로그램에서 연구를 진행하고 있는 전문가 집단은 모두 중학교 수학 교사이자 석사 과정에 재학 중이며, 실행식에 대한 전문성을 지니고 있고 시도 교육청 부설 영재원이나 방과 후 학교, 교원 연수 등에서 실행식과 관련된 강의를 진행한 경험이 있다. 이들의 약력은 아래의 <표 Ⅴ-6> 과 같다. 표를 살펴보면 알 수 있듯이, 전문가 집단은 실행식과 관련된 여러 경력과 수학 교과에 대한 전문성을 지니고 있음을 확인할 수 있다.

<표 Ⅴ-6> 전문가 집단의 약력

전문가	약력
갑	충청북도 소재 대학교 수학교육과 졸업 수도권 소재 대학교 수학교육과 석사과정 재학 중 수도권 소재 중학교 수학 교사(2008년 ~) 시도교육지원청 영재원 강사(2011년 ~) 한국콘텐츠진흥원 게임 활용 코딩교육 교과서 집필진(2018년) 게임활용 코딩교육 교원연수 강사(2018년)
을	수도권 소재 대학교 수학교육과 졸업

	수도권 소재 대학교 수학교육과 석사과정 재학 중 수도권 소재 중학교 수학 교사(2015년 ~) 게임활용 코딩교육 교원연수 보조 강사(2018년)
병	수도권 소재 대학교 수학교육과 졸업 수도권 소재 대학교 수학교육과 석사과정 재학 중 수도권 소재 중학교 수학 교사(2016년 ~) 시도교육지원청 영재원 강사(2017년 ~)

연구자는 피험자를 비롯한 모든 프로그램 참여자들의 답안을 분석하고 이에 대한 기준을 설정하기 위해 몇 회의를 소집하였다. 더불어 객관적인 분석 기준을 설정하기 위해 각 3개의 기준점과 수준으로 평가를 진행하기로 하였다. 3개의 기준점은 '구조물의 완성도', '문자 이해의 수준', '수학적 창의성' 이며, 먼저 구조물의 완성도' 의 수준에 따라 그룹을 나눈 결과는 아래의 <표 Ⅴ-7>과 같다.

<표 Ⅴ-7> 구조물의 완성도를 분석틀로 설정한 그룹 설정[10)]

	갑	을	병
상	S3, S6, S9, S13, S15, S16, S18, S19, S20	S3, S6, S14, S16, S18, S19, S20	S3, S6, S14, S16, S18, S19, S20
중	S2, S4, S8, S10, S11, S14	S2, S4, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S15	S2, S4, S8, S9, S10, S11, S12, S13, S15
하	S1, S5, S7, S12, S17	S1, S5, S7, S17	S1, S5, S7, S17

10) 갑, 을, 병은 전문가를, 그리고 상, 중, 하는 피험자의 수준을 의미한다. 이후 정리된 전문가 집단의 분석은 동일한 표의 형식을 따른다.

이를 살펴보면, 전문가 집단이 각각 설정한 수준과 그에 따른 피험자 집단이 상당 부분 겹친다는 것을 살펴볼 수 있다. ‘상’ 그룹의 경우 5명(S6, S16, S18, S19, S20), ‘중’ 그룹 또한 5명(S2, S4, S8, S9, S10), 마지막 ‘하’ 그룹은 4명(S1, S5, S7, S17)이 해당하여 총 14명의 수준이 일치하였다. 구조물의 완성도의 경우, 자료에 제시된 그림으로도 충분히 식별 가능할 정도로 학습자의 수준차를 단적으로 드러내는 질문이므로 연구자 간의 차이가 거의 없음을 추측할 수 있다. 다음으로는 ‘문자 이해의 수준’에 따라 동일한 방법으로 그룹을 나누는 질문을 제시하였다. 이 또한 표로서 다음과 같이 표현해보았다.

〈표 Ⅴ-8〉 문자 이해의 수준을 분석틀로 설정한 그룹 설정

	갑	을	병
상	S3, S5, S8, S10, S13, S14, S15, S16, S17, S18, S19, S20	S3, S15, S17, S18, S20	S8, S10, S11, S13, S14, S16, S18
중	S1, S2, S4, S7, S11, S12	S5, S7, S8, S10, S11, S13, S14, S16, S19	S3, S5, S12, S15, S17, S19, S20
하	S6, S9	S1, S2, S4, S6, S9, S12	S1, S2, S4, S6, S7, S9

문자 이해의 수준으로 그룹을 나누어본 결과, 이전의 ‘구조물의 완성’ 수준으로 그룹을 나눈 것과는 달리 피험자 집단이 크게 겹치지 않는다. ‘상’ 그룹의 경우 1명(S18), ‘중’ 그룹은 0명, ‘하’ 그룹은 2명(S6, S9)에 해당한다. 문자 이해는 실행식에서 유연하게 코드를 활용하고, 정확성을 기하여 수학화를 추구해가는 것에 있어 매우 중요한 역량 중 하나이다. 특히, 전문가 A의 경우 B, C와는 확연하게 다른 그룹핑을 설

정한 것을 살펴볼 수 있다. 앞의 분석과 같이, 다음은 ‘수학적 창의성’ 기준으로도 피험자 집단을 나눈 것이다.

<표 Ⅴ-9> 수학적 창의성을 분석틀로 설정한 그룹 설정

	갑	을	병
상	S3, S10, S13, S16, S18, S20	S3, S4, S6, S11, S16, S18, S19, S20	S8, S9, S15, S16, S18
중	S4, S5, S8, S11, S14, S15, S17, S19	S2, S8, S9, S10, S12, S13, S14, S15	S3, S4, S6, S11, S13, S19
하	S1, S2, S6, S7, S9, S12	S1, S5, S7, S17	S1, S2, S5, S7, S10, S12, S14, S17, S20

수학적 창의성을 기준으로 피험자를 그룹핑한 결과, ‘상’ 수준은 2명(S16, S18), ‘중’ 수준은 0명, ‘하’ 수준은 2명(S1, S7)의 피험자가 모든 전문가 집단에서 각 수준을 나타내었다. 연구자는 앞서 언급한대로, 각 분석틀에 대한 기준을 하위 요소로 제시하기도 하였다. 그 중에서 수학적 창의성에 대한 각 전문가의 분석 기준은 다음과 같다.

> **[갑]** ‘하’ 그룹은 ① **규칙을 전혀 파악하지 못하는 경우**이고, ‘중’ 그룹은 ② **다리의 일부분의 규칙을 파악은 하나 전체 다리 모양에 대한 규칙성은 못 찾은 경우**이며, ‘상’ 그룹은 ③ **다리 전체모양을 기준으로 규칙성을 파악**하여 군더더기 없이 치환을 사용한 경우이다.
> **[을]** 디자인의 ① **독창성, ② 복잡도 및 ③ 완성도**를 기준으로 하였다.
> **[병]** ① 일반적으로 **다른 사람들이 생각하기 어려운 아이디어를 표현**했는지 (ex. 장식물의 방향이 다리 바깥으로 향한 경우, 장식물이 다리 시작 부분부터 함께 시작하지 않은 경우, 장식물까지 색을 변화한 경우,

치환을 중간 부분에 사용하고 **실행식을 구조화하여 실행식으로 다리 구조를 알아볼 수 있게 한 경우,** 다리 기둥이 직선의 모양이 아닌 경우)
② 색을 다양하게 이용하였는지(ex. 다리의 기둥의 색을 변화한 경우)
③ **실행식을 얼마나 구조화하였는지** (ex. 알아보기 쉽게 do를 사용하여 구분한 경우)[11]

이와 같은 과정을 거치며, 연구자와 전문가 집단은 먼저 각 질문에서 요구하는 근거의 수준을 구분하기 위한 일정한 합의가 필요하다는 점을 인지하였다. 또한, 전체의 합의에 근거한 기준을 종합하여 다시 한 번 분류하는 것이 더욱 타당할 것이라는 의견이 제시되었다. 또한, 제시된 분류 기준은 본 분석에 적절하다는 의견 또한 모아졌다. 하여, 위에 제시한 전문가의 분석 이외의 타 질문에 대한 분석은 생략하고, 본 학습 환경과 연구 문제의 상황에서 '구조물의 완성도', '문자 이해의 수준', '수학적 창의성'을 어떻게 구분할 수 있을지에 대한 전문가 집단의 합의 과정과 그 결과에 대해 논의해보겠다.

산출물의 결과 분석 (2)

전문가 집단과의 합의는 온라인에서 이루어졌기 때문에, 연구자는 원활한 의사소통을 위해 전문가들이 제출한 내용을 토대로, 답변에 대한 근거를 최대한 상세히 적어 달라 부탁하였다. 또한, 온라인 회의를 토대로 채점지를 수정하여 다시 한 번 결과물에 대한 분석하기로 하였다. 본 절에서는 각 분석틀 별로 흐름에 따라 회의 내용의 일부를 제시하여 회의 과정을 소개한다. 연구자는 FGI(Focusing Group Interview) 방법을 참고하여, 정식적인 방법을 차용하지는 않았으나 서로가 합의 과정을 다듬어 가는 과정을 중점적으로 다루었다. 이에 각 전문가들은 자신이 어떠

11) 가독성을 위한 윤문을 거쳤으며, 같은 의도로 원문자 및 강조 표시 또한 연구자가 하였다.

한 기준으로 피험자의 수준을 구분하였는지에 대해 소개한 후, 합의의 과정을 거쳤다. 아래의 내용은 '구조물의 완성도'의 기준에 관한 논의 중 일부이다.

[갑] 상 수준은 다리도 있고, 상판 디자인이 대칭을 정확히 이룬 경우입니다. 중 수준은 상판 디자인은 대칭을 이루나 다리가 없거나 정확히 대칭을 맞추지 못한 경우 입니다. 하 수준은 상판이 있고 대칭을 이뤄도 디자인의 단순도가 너무 심하여 불성실하다고 판단되는 경우입니다. … **조건(다리, 상판, 상판의 꾸미기가 대칭을 이룰것)이 모두 충족되어야 상으로 분류** 하였습니다.

[을] 장식물들의 대칭성, 예술성(복잡한 정도), 그리고 기둥까지 만든 경우 더 높은 점수를 주었습니다.

[병] 하: 다리 기둥을 만들지 않은 경우, 다리 기둥이 있더라도 장식물이 지나치게 단순한 경우, 다리 기둥이 없더라도 장식물에 창작이 들어간 경우, 중: 다리기둥과 장식물이 있으나 일부분이 완성되지 않은 경우, 기둥과 장식물이 있으나 색이 다양하지 않은 경우, 상: 다리기둥과 장식물이 모두 완성되어 있으면서 색에 변화를 준 경우로 기준을 나누었습니다.

[연구자] 을 선생님께서는 대칭성과 예술성, 기둥(다리의 요소)로 기준을 잡았다고 하시는데요, 이때 복잡한 정도를 예술성에 포함하셨는데, 예술성이 정확히 무엇인가요?

[을] 장식물의 심미적인 정도입니다. **구조물이 단순하지 않고 다양한 모양으로 조화와 대칭을 이루면 예술성이 높다**고 판단하였습니다.

[연구자] 네, 그럼 예술성을 복잡도 측면에서 해석하신 것으로 봐도 무방하겠네요. 병 선생님께서 또한 다리의 요소와 복잡성을 기준으로 설정하셨네요. 모두의 의견을 종합하자면, **'구조물의 완성도' 기준은 ' 다리의 요소' '대칭성', '복잡도'를 기준으로 평가해도 되는 걸까요?**

[전문가 집단] 네.[12)]

---

12) 온라인 회의인 점을 감안하여, 각 전문가의 의견이 훼손되지 않는 선에서 맞춤법이

위와 같은 내용을 토대로, ‘구조물의 완성도’는 문제에서 요구하는 다리의 요소(상판, 구조물, 기둥)를 모두 충실하게 반영하였는지, 그리고 수학적 요소인 대칭성을 잘 지켰는지를 기준으로 해야 한다는 의견이 공통적으로 존재하였다. 그리고 복잡도 또한 수준을 구별하는 것에 필수적이라 하는 논의가 있어, 이와 같은 합의 과정을 통해 ‘구조물의 완성도’는 세 가지의 기준을 마련하였다.

다음으로는 ‘문자 이해의 수준’에 대한 준거를 설정하기 위한 회의 내용이다. 이 문항의 경우 다른 두 개의 문항에 비해 전문가 간 가장 불일치도가 높았기 때문에, 충분한 합의를 위해 모두가 자신의 의견을 논리적으로 피력하기 위해 노력하였다. 아래는 문자 이해의 수준의 기준을 마련하기 위한 회의 내용의 일부이다.

> **[연구자]** 보셨다시피, 해당 답변이 전문가 집단에서 약간의 차이를 보입니다. 갑 선생님께서 분류하신 기준은 무엇인가요?
>
> **[갑]** 문자 이해의 수준은 말 그래도 문자의 의미를 이해하고 있느냐의 유무 이므로, 코드를 얼마나 효율적으로 작성하였는지는 보지 않았습니다. 즉, 치환 문자를 사용 했을 때 얼마나 적절히 사용했는지는 보지 않았습니다.
>
> **[연구자]** 그럼 선생님께서 말씀하시는 **문자 이해의 수준이란, 기호(실행식 기본 명령어)와 계수를 원만히 사용하는지의 여부를 말하는 걸까요?**
>
> **[갑]** 그것은 학습 단계에 따라 다르다고 생각했습니다. 우리가 한자리 수의 덧셈을 배우고 난 후라면 상 수준이란 한자리 수의 덧셈을 자유로이 할 수 있는 학생을 의미할 것이고, 두 자리 숫자의 덧셈을 배우고 난 후라면 한 자리 숫자의 덧셈만 할 줄 아는 학생은 중 수준으로 분류가 될 것입니다. 따라서 치환 문자만 배우고 난 후라면 상 수준이란 치환문자까지 쓸 수 있는 학생을 의미할 것이고, 변수 문자까지 배운 후

나 반복되는 내용 등을 연구자가 전체적으로 윤문하였다. 가독성을 위한 강조 표시 또한 연구자가 하였다. 이후 내용도 동일한 과정을 거쳤다.

라면 치환 문자만 하는 학생은 중 수준에 해당될 것입니다. **따라서 배운 내용을 모두 사용한 학생들은 상 수준으로 분류하였습니다.**

[병] 치환을 배웠고 실행식에 공통부분이 있는데도 불구하고 치환하지 않은 것은 치환의 의미를 이해하지 못한 것이라고 생각합니다. **치환 명령어도 문자의 공통부분을 치환하는 문자를 다루는 것이므로 문자 이해의 수준에 들어가야 한다**고 생각합니다.

[연구자] 그럼 병 선생님께서는 치환의 사용 수준, 즉 식에서 공통되는 구조를 유연하게 사용했는지가 '문자 이해의 수준'에 포함되어야 한다는 말씀인가요?

[을] 전 '문자 이해의 수준'을 자바말 '코드 이해의 수준'과 같은 맥락에서 봤습니다. 계수와 도돌이표, 치환을 효과적으로 사용하여 길이도 줄이고 코드의 구조가 잘 드러난 경우 문자 이해의 수준이 높다고 보았습니다. 저도 치환의 사용 수준을 문자 이해의 수준에 포함해서 판단했습니다.

…

[연구자] 을 선생님께서는 치환 사용 수준을 포함해서 평가해야 한다고 하셨는데요, 그럼 상/중/하의 기준은 실행식 기호의 활용 수준(효과성 기준)으로 이해해도 괜찮을까요?

[병] 치환을 사용할 필요가 없다면 사용하지 않아도 되지만 **공통된 부분이 명확히 보이는데도 사용하지 않는 것은 이해가 부족하다**고 생각합니다.

[을] 네.

[연구자] 그럼 병 선생님은 상과 중의 수준을 구분할 때, 치환의 활용 수준이 포함되어야 한다고 생각하시나요?

[병] 중과 상을 구분할 때 치환의 활용도를 고려했습니다. 치환을 할 필요가 없는데(1번만 사용되었는데), 치환한 경우는 중 수준으로 보았습니다(치환의 필요성에 대해 이해를 못한 듯하여).

앞서 살펴본 '구조물의 완성도'와 달리 '문자 활용의 수준'은 전문

가 간 다소 차이를 보인다. 세 전문가 모두 중학교 수학 교사임에도 불구하고, 제시된 기준 중에서 수학 교과의 모학문과 가장 가까운 근거를 요구하는 문자 활용의 수준에서 이견이 있을 것이라는 점은 연구자가 예측하지 못한 부분이다. 전문가 갑의 경우, 치환 문자를 사용 유무가 아닌 '어떻게' 사용하는지에 대한 유무는 문자 활용의 수준을 구분하는데 포함되어서는 안 된다고 주장하였다. 그러나 을과 병 전문가의 경우, 공통된 부분이 분명함에도 불구하고 치환을 사용하지 않은 것은 문자의 이해도가 낮은 것이라 판단하였다. 이를 전문가 갑과 함께 숙고한 결과, 전문가 갑 또한 수학적 창의성의 관점에서의 치환과 문자 활용 수준에서의 치환은, 엄밀히 고려했을 때 구분되어야 함을 인지하고 치환 활용 수준이 문자 활용의 수준 준거에 포함되어야 함을 수용하였다. 이에 문자 활용의 수준에 대한 기준은 실행식에서 사용되는 기호의 활용 수준으로 기준을 설정하였다.

마지막으로, '수학적 창의성'에 대한 분석틀의 회의 내용은 다음과 같다. 수학적 창의성에 관련된 논의는 본 학습 환경과 연구 문제에 근거함을 사전에 고지한 상태에서 진행되었다.

> **[연구자]** 갑 선생님께서는 수학적 창의성의 분류 기준을 규칙성의 활용을 언급하셨습니다. 실행식 학습 환경과 현재 주어진 문제에서 수학적 창의성의 요소 중 하나가 규칙성의 발견이라는 건가요?
> **[갑]** 네. 문제가 대칭을 이루도록 모양을 만들도록 하였고, 치환 문자를 통해서 짧게 코드를 작성하도록 안내가 되었습니다. 그렇다면, **여기에서 수학적 창의성이란 대칭구조를 이룬다는 것을 기반으로 규칙성을 찾아내어 코드가 짧게 구성할 수 있는 능력**으로 보았습니다.
> **[연구자]** 그럼 수학적 창의성의 수준을 구별하는 데에는, 본 문제가 요구했던 수학적 요소를 충분히 반영했는지 살펴보신 것과 같네요?
> **[갑]** 그렇죠. … 한마디 덧붙이면 무릇 창의성이란, 어떤 획기적인 아이디어로 문제를 효율적으로 해결하는 능력이라고 볼 수 있을 텐데요.

대칭구조가 있는 물체를 보고서, 코드를 짧게 구성하는 문제를 해결하려면, 대칭구조를 이용해야겠다는 생각을 할 수 있는 것이 창의성이라고 보았습니다.

[연구자] 실행식에는 다양한 수학적 의미가 숨어있고, 해결해나가는 과정에서 나름의 아이디어를 꿰어 구조를 찾아나가야 합니다. 그 **과정과 결과를 창의성이라고 보신거죠?**

[갑] 그렇습니다.

…

[연구자] 을 선생님께서는 디자인의 독창성, 복잡도 및 완성도를, 병 선생님께서는 아이디어의 독창적인 표현과 색의 구분, 실행식의 구조화라고 말씀하셨습니다. 특히, 병 선생님께서는 아이디어의 독창적 표현에 실행식의 활용을 포함하셨는데, 이것이 선생님께서 말씀해주신 실행식의 구조화에 포함되는듯합니다. 그럼 병 선생님의 의견은 실행식의 유연한 사용(색의 구분)과 구조화라고 해석해도 될까요?

[병] 네. 그렇게 해석하면 됩니다!

[연구자] 을 선생님은 의견이 어떠신가요?

[을] 저는 본 과제에서 요구되는 장식물 디자인의 창의성과 수학적 창의성을 비슷한 맥락에서 보았습니다. 코드를 통해서 장식물을 만드는 과정 자체에 계수 사용, 공통 부분 치환 등의 수학적 사고요소가 포함되고 장식물 디자인이 독창적이고 복잡할수록, 수학적 창의성을 높게 발휘하였다고 보기 때문입니다. 즉, **본 과제에서 장식물 디자인을 위한 사고와 수학적 사고가 밀접한 관계에 있다고 보았습니다.**

[연구자] 그럼 을 선생님께서는 디자인 '과정'에 수학적 창의성이 요구되므로, 결국 산출물의 수학적 창의성이 높다는 것은, 수학적 사고를 활용한 실행식 코드의 활용과 복잡한 구조화라는 것인가요?

[을] 네, 맞습니다.

[연구자] 그럼 종합하자면, 실행식 학습 환경과 이 문제에서 학습자들이 제출한 마지막 산출물은 '수학적 창의성'의 기준을 기호(계수, 치환 등)와 구조화(대칭성)를 근간으로 한 실행식의 유연한 사용으로 봐도 되는

걸까요?

[을] 동의합니다.

[병] 네, 덧붙여서 제가 의미하는 실행식의 구조화에는 다리의 요소가 실행식을 보고 알 수 있게 만드는 것도 포함하고 있습니다.

[연구자] 지금까지의 의견을 종합해보자면, 실행식의 유연한 사용에는 기호(계수, 치환 등)와 구조화의 활용이 수반되어야 하는 듯합니다.

[병] 창의성에는 독창성도 포함되어 있어야 한다고 생각합니다

[을] 저도 병 선생님처럼 독창성도 중요한 요소라고 보고, **독창성을 다리의 디자인과 연결지어서 판단했습니다(독창적인 디자인을 하는 과정에서 코드 역시 독창적으로 짜야 하기에).**

[연구자] 현재 일반 창의성이 아닌 수학적 창의성을 논하고 있습니다. 을 선생님께서는 독창적 디자인을 위해서는 그 과정에서 실행식을 독창적으로 사용해야 한다고 하시는데요. 그럼 그 독창적인 사용은 코드를 효율적으로 활용하고, 반복되는 부분을 잘 구조화하는 것을 포함하는 걸까요? 최종 디자인의 복잡도나 독창성을 수학적 창의성의 요소로 봐도 좋을지 모르겠습니다.

[을] 전 **디자인을 하는 과정에서 코드에 포함된 수학적 사고가 반영된다고 봐서요. '4u' 의 반복만 쓴 친구와 '3d[d]T2us2T2s[d]su' 로 쓴 친구는 수학적 창의성에서도 분명 차이가 있다**고 봤습니다.

[병] 디자인의 독창성을 볼 때는 구조물의 완성도나 문자 이해에서 고려하지 않은 부분까지도 평가하였는데, 수학적 창의성에 디자인의 독창성을 보지 않는다면 구조물을 평가할 때 디자인의 독창성은 고려하지 않는건 가요, 아니면 추가로 평가하는 건가요?

[을] 제 말을 종합해 보면 연구자의 말처럼 '코드를 효율적으로 활용하고, 반복되는 부분을 잘 구조화하는 것'이 실행식의 독창적 사용에 포함되는 것이 맞다고 생각합니다.

[병] 저도 독창성에 대한 을 선생님의 말에 동의합니다.

[연구자] 네, 그럼 종합하자면 **본 학습 환경과 문제에서 수학적 창의성은 코드의 활용을 위한 선행 요소로 봐도 무방할까요(이때 코드란 실행**

식 기호 체계입니다)? 전체적인 의견은 수학적 창의성이 반영된 결과물을 위해서는 **실행식을 작성하는 과정에서 '수학적으로 창의적인' 아이디어가 필요하다**는 뜻인 듯합니다.

[을] 네, 무방할 것 같습니다.

[병] 네, 그렇게 봐도 될 것 같습니다.

전문가들은 실행식 기반 학습 환경에서는 문제를 해결해나가는 과정에서 수학적으로 창의적인 아이디어가 요구되며, 이것이 창의적인 산출물을 도출한다는 합의에 이르렀다. 이때, 창의적인 산출물이란 피험자가 수학적 창의성을 발휘한 아이디어들이 종합적으로 꿰어져야 도출될 수 있으므로, 수학적으로 창의적인 '과정'과 '결과'는 관련성이 높다고 해석할 수 있다. 즉, 문제를 해결하기 위한 강력하고 핵심적인 수학적 아이디어의 생성이 수학적 창의성을 도출하며, 학습자가 최종적으로 제출한 산출물은 다양한 수학적 창의성들의 중첩으로 인한 결과물이라고 볼 수 있다. 정리하자면, 전문가 집단은 실행식 학습 환경과 문제 해결 과정에서 계수나 치환을 비롯한 기호 체계를 구조적으로 적절히 활용하고, 대칭성을 비롯한 수학적 요소들이 적합한 것이 수학적 창의성을 구별하는 중요 준거라 설명하였다. 이와 같은 단계들이 모여 수학적으로 창의적인 결과물을 만들어내기 때문이다. 이는 앞서 학습자가 다양한 수학적 아이디어를 쌓아가며 나름의 수학적 본질을 추구해나가는 수학화 과정 속에서 수학적 창의성이 발현된다는 연구자의 주장을 뒷받침한다. 연구자는 위의 과정을 통해 학습자의 최종 실행식을 비롯한 사고 과정의 데이터를 분석하는 당위성을 또 다시 재확인하였다.

이와 같은 합의에 따라, 최종적으로 정리된 세 가지 분석틀에 대한 준거는 다음과 같다. 더불어, 학습자가 실행식을 유연하게 활용하는지에 대한 준거는 크게 계수와 치환의 구조화된 사용이 있다는 점을 미루어, 연구자와 전문가는 피험자의 수준을 3수준이 아닌 4수준으로 나누는 것이 더욱 엄밀한 구분이라는 의견을 모았다. 위의 내용까지 종합하여, 전

문가 집단이 합의된 준거에 따라 피험자를 재분류한 결과는 다음과 같다.

<표 V-10> 합의된 분석틀의 준거

분석틀	준거
구조물의 완성도	요소의 완전성, 대칭성, 복잡도
문자 이해의 수준	실행식에서 사용되는 계수와 치환의 활용 수준
수학적 창의성	수학적 사고에 근거한 실행식의 유연하고 구조화된 사용

<표 V-11> 합의된 준거에 따른 피험자의 구분 (1)

구조물의 완성도	갑	을	병
A	S3, S6, S13, S16, S18, S20	S3, S6, S16, S18, S19, S20	S6, S16, S18
B	S9, S15, S19	S2, S4, S10, S11, S13, S14, S15	S3, S9, S13, S15, S19, S20
C	S2, S4, S5, S8, S10, S11, S12, S14	S1, S5, S8, S9, S12	S2, S4, S8, S10, S11, S12, S14
D	S1, S7, S17	S7, S17	S1, S5, S7, S17

<표 Ⅴ-12> 합의된 준거에 따른 피험자의 구분 (2)

문자 활용의 수준	갑	을	병
A	S3, S13, S15, S16, S17, S18, S20	S3, S15, S17, S18, S20	S10, S13, S14, S16, S17, S18
B	S5, S8, S10, S11, S12, S14, S19	S10, S11, S13, S14, S16, S19	S3, S8, S11, S15, S19, S20
C	S1, S2, S4, S6, S7	S4, S5, S6, S7, S8, S12	S2, S5, S7, S12
D	S9	S1, S2, S9	S1, S4, S6, S9

<표 Ⅴ-13> 합의된 준거에 따른 피험자의 구분 (3)

수학적 창의성	갑	을	병
A	S10, S13, S16, S18, S20	S3, S15, S16, S18, S19, S20	S11, S13, S15, S16, S18
B	S3, S14, S15	S4, S6, S10, S11, S13, S14, S17	S3, S8, S10, S17, S20
C	S4, S5, S8, S11, S17, S19	S1, S2, S8, S12	S2, S4, S5, S7, S14, S19
D	S1, S2, S6, S7, S9, S12	S5, S7, S9	S1, S6, S9, S12

3.4 3 ~ 4단계의 과정 분석

연구자는 앞서 살펴본 전문가들의 의견을 종합하면, 수학적 창의성 수준의 구분 준거가 구조물의 완성도와 문자 이해의 수준을 포함하고 있음을 인지하였다. 회의 중에 등장했던 전문가들의 견해에는 다음과 같은 내용이 있다.

> **[연구자]** (회의가 진행되지 않은 첫 번째 설문에서 문자 이해의) 상 수준에서 치환을 어떠한 의미와 방식으로 했는지는 구분하지 않았다는 말씀이죠?
> **[갑]** 네. 그것은 **수학적 창의성의 안경을 끼고 문자 이해의 수준을 본다**는 느낌이 들었습니다.
> **[연구자]** 병 선생님께서는 본 문제에서 수학적 창의성의 구분 기준을 아이디어의 독창적인 표현과 색의 구분, 실행식의 구조화라고 말씀하셨습니다. 특히, 선생님께서는 아이디어의 독창적 표현에 실행식의 활용을 포함하셨는데, 이것이 선생님께서 말씀해주신 실행식의 구조화에 포함되는 듯도 합니다. 병 선생님의 수학적 창의성에 관한 의견은 색의 구분을 포함한 실행식의 유연한 사용과 구조화라고 해석해도 될까요?
> **[병]** 네. 그렇게 해석하면 됩니다!
> **[을]** '실행식의 유연한 사용'이 수학적 창의성뿐만 아니라 문자 이해의 수준과도 중복되는 듯합니다.

전문가들은 수학적 사고에 근거한 실행식의 유연하고 구조화된 사용에는 구조물의 완성도와 실행식에서 사용되는 문자 이해의 정도가 일정 부분 선행될 필요가 있다는 사실을 공통적으로 언급했다. 이는, 학습자들이 이전에 실행식을 학습한 경험이 동일하기 때문에 학습한 내용을 잘 활용하여, 이를 문제 풀이의 방법으로 꿰어나가는 것 또한 수학적 창의성의 일부라고 해석하였기 때문이다.

<표 Ⅴ-14> 피험자의 수준 구분

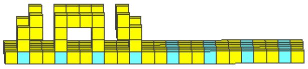
수준	피험자
A	S20, S19, S18, S16
B	S17, S15, S14, S13, S11, S10, S3
C	S12, S8, S4, S2, S1
D	S9, S7, S6, S5

따라서 과정 분석을 위해 전문가들이 나눈 피험자의 구분을 종합하여 최종적으로 피험자의 수준을 구분하기 위해, 각 전문가의 분석에서 수학적 창의성 항목의 'A' 수준을 받은 피험자는 4점, 'B' 수준을 받은 피험자는 3점, 'C' 수준을 받은 피험자는 2점, 'D' 수준을 받은 피험자의 경우 1점을 부여하여 합을 구하여 순위를 정하였다. 이를 종합한 피험자의 수준 구분은 위의 표와 같다. 점수 합산 결과는 부록에 첨부하기로 한다. 앞으로는 20명의 피험자가 제출한 실행식의 시작 단계부터 마지막 단계까지 모두 분석한 후, 각 그룹별로 다리의 요소는 모두 포함했음과 동시에 논의의 여지가 두드러지는 학습자를 한 명씩 선정하여 요약적으로 제시하고자 한다.

D 수준: 피험자 S6의 과정 분석

S6은 D 수준에 해당하는 피험자 중 하나로, 상당히 초보적인 수준에 머무르는 실행식을 작성하였다. S6이 제출한 실행식을 요약적으로 제출하면 다음과 같다.

① 상판에 자리를 잡고 장식물을 올림



begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

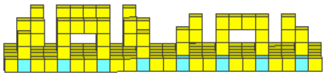
do ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLABAABAABAABA llr

endttTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTd
R4sL

endtt

---

② 장식물을 위, 아래로 전체의 2/3 정도 올림



begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do ABAABAABAABA

llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLABAABAABAABA
llrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRT
TT

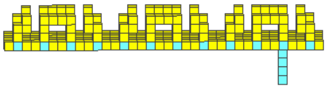
endtt

---

③ 장식물 올리기 완성

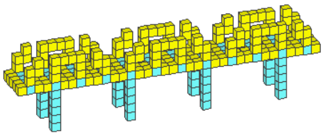
```
begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLABAABAABAABAllrrRRLRTuusuTsddTTsu
uLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssdd
TTsuLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sL

endtt
```

④ 기둥 만들기 시작



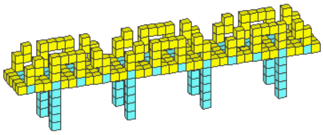
```
begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’
do ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLL4sL4sc5d
endtt
```

⑤ 기둥 만들기 완성



```
begintt

A= 'Cs[llll]'
B= 'cs[llll]'

do ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
TTTTRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR
4sLL4sL4sc5d5uL4T5d5uR9T5d5u9T5d5u9T5d
5uR4T5d5uR9T5d5u9T5d5u

endtt
```

⑥ 계수 활용하여 식을 축소한 후 최종 완성(이전 단계와 식의 내용은 동일함)



```
begintt

A= 'Cs[4l]'
B= 'cs[4l]'

do ABAABAABAABA
2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
4TRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR4sL
ABAABAABAABA
```

2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
4TRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR4sL
ABAABAABAABA
2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR
4TRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR4sL
L4sL4sc5d5uL4T5d5uR9T5d5u9T5d5u9T5d5u
R4T5d5uR9T5d5u9T5d5u

endtt

이 피험자의 실행식 작성 과정을 살펴보면, 먼저 연구자가 상판의 시작 지점을 오른쪽 맨 끝으로 지정해줬음에도 불구하고, 왼쪽 맨 끝으로 넘어가 시작 지점을 새로 정하여 불필요한 식을 작성하였다. 그 후에는 이전에 만든 길이가 12일 상판과 그 장식물에 대한 실행식을 가져와 이를 반복하는 작업을 수행하였다. 따라서 이 학생은 나름대로 분절하여 다리를 만드려 노력한 흔적은 보인다. S6 피험자는 상판을 어떻게 만들었는지와 대칭을 어떻게 유지하였는지의 전략을 물었을 때, '곱하기를 이용해서 만들었습니다', '대칭을 유지하기 위해서 틀린 부분은 고치고 계속 실행 버튼을 눌러서 확인하면서 대칭을 유지하였다'라고 답하였다. 이로 미루어, 대칭성으로 인해 다리의 구조가 반복됨을 인지는 하였으나, 구조화하여 식을 작성하는 것에 대한 역량은 부족하였음을 알 수 있다. 또한, S6은 대칭성이라는 수학적 요소는 잘 반영하여 오류 없이 구조물을 완성하였으나, 아이러니하게도 대칭성을 고려하지 않은 작업의 순서를 보였다. 더불어, 문자의 사용이 연속적으로 발생함에도 불구하고 실행식이 최종적으로 완성된 후에서야 의무적으로 식을 줄이기 위해 계수를 사용하였고, 계수를 완벽히 활용하지 못하는 모습을 보였다. 즉, 이 피험자는 단순히 실행식을 나열하는 것에서 불완전한 계수의 사용으로 실행식의 흐름이 이어졌다고 할 수 있다.

C 수준: 피험자 S2의 과정 분석

피험자 S2는 C 수준에 해당한다. 그 실행식의 흐름과 요약은 다음과 같다.

① 기둥 만들기(처음부터 계수 사용)

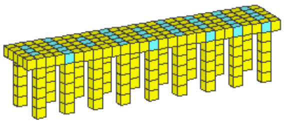
begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABA

do RRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]

endtt



② 기둥 완성

begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

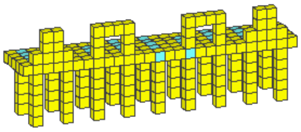
do ABAABAABAABAABAABAABAABAABA

do
RRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s
[5d]3s[5d]sR4sRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3
s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]

endtt

---

③ 장식물 한 쪽 완성



begintt

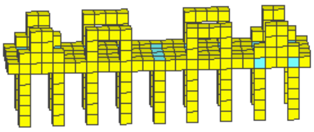
A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABA

do
RRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s
[5d]3s[5d]sR4sRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3
s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRsus2us2dsd3s3u3
s3d6s3u3s3d3sus2us2ds

endtt

④ 최종 완성



begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABA

do
RRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s
[5d]3s[5d]sR4sRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3
s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRsus2us2dsd3s3u3
s3d6s3u3s3d3sus2us2dsdsR4sRsus2us2dsd3s3u
3s3d6s3u3s3d3sus2us2ds

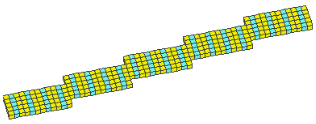
endtt

피험자 S2는 S6과 달리, 실행식을 완성하고 계수를 사용하지 않고 문자가 반복되는 첫 지점부터 계수를 사용하였다. 또한, 상판의 실행식을 축

소하지는 못했지만, 장식물과 다리가 시작되는 부분에 do를 새로 써서 식을 구별하였으며, 이후 계수를 완벽하게 사용하는 모습을 보였다. 더불어 교수자가 준 시작점을 충분히 활용하여, 불필요한 이동 없이 바로 기둥을 만들었다. 그러나 상판 명령어인 'AB'와 기둥인 '[5d]3s', 구조물 명령어에 해당하는 'sR4sRsus2us2dsd3s3u3s3d6s3u3s3d3sus2us2ds'가 반복됨에도 불구하고, 이를 구조화하는 수준까지는 발전하지 못해 아쉬움이 남는다. 교수자가 다시 한 번 반복되는 구조에 대해 생각해볼 여지와 조언을 부여하고, 비계 또한 제공하였음에도 불구하고 수준 상승의 비약에 닿기는 쉽지 않았던 것으로 보인다. 피험자는 상판을 어떻게 만들었냐는 질문에 대해 '명령어에 있는 AB라고 되어 있는 것을 뒤에 다시 명령어를 똑같이 넣어 늘렸다'라고 언급하여, 문자 활용 수준은 비교적 유연하고 상판의 구조물이 반복되는 것을 충분히 인지한 것으로 보임에도 구조화된 치환으로는 수준이 상승하지 못하였다.

B 수준: 피험자 S3의 과정 분석

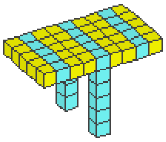
다음으로는 4 수준 중 상위 두 번째에 해당하는 B 수준의 피험자 중 한 명인 S3의 과정을 정리하였다.



① 상판 확대 시도(오류)

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
do 5 {ABAABAABAABA ll}

endtt
```

② 기둥을 포함한 1/4 완성



begintt

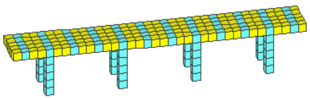
A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do ABAAB[5d]L4s[5d]2R4sLAABA

endtt

③ 부분 반복

begintt

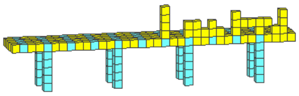


A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do 4{ABAAB[5d]L4s[5d]2R4sLAABA}

endtt

④ 장식물을 하나 올림



begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do 4{AB2AB[5d]L4s[5d]2R4sL2ABA}
do 2Rs[3u]s[u]2s2u2R[s]2R3s[u]2d2s
us[u]2susd2Ts 3u

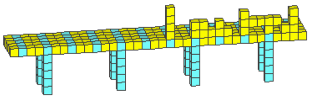
endtt

---

⑤ 장식물을 하나 올리고, X로 치환함
(이전 단계와 식의 내용은 동일함)

begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’



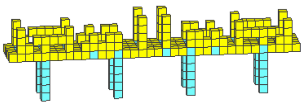
X= ‘2Rs[3u]s[u]2s2u2R[s]2R3s[u]2d2sus[u]2sus
d2Ts3u’

do 4{AB2AB[5d]L4s[5d]2R4sL2ABA}
do 1X

endtt

---

⑥ X를 추가하여 최종 완성



begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

X= ‘[3u]s[u]2s2u2R[s]2R3s[u]2d2sus[u]2susd’

```
do 4{AB2AB[5d]L4s[5d]2R4sL2ABA}
do 2Rs1X2Ts[3u]18Tds2Rs1X3Td[4u]
L3TsL15s2R1X2Ts[3u] d18T2R1X2Ts3u

endtt
```

S3은 앞서 살펴본 S6, S2와는 문제 해결 방법에서 분명한 차이를 보인다. 특히, 상판의 반복되는 부분을 괄호로 묶으려 한 첫 시도는 비록 오류가 있음에도 불구하고 상당히 의미가 있다. 뒤에서 피험자는 기둥까지 포함하여 길이가 9인 다리를 만들었는데, 이를 통해 우리는 피험자가 대칭성을 위해 실행식을 구조화할 필요가 있다는 점을 어느 정도 인지하고 있다는 사실을 유추할 수 있다. 문제가 의도하고 있는 바와 문제 해결에 필요한 부분이 충분히 인지되었기 때문에, 완벽한 계수의 사용과 더불어 반복된 부분을 처음부터 부분으로 생각하고 반복하려 시도한 것이다. 위의 S6, S2 피험자와 가장 크게 다른 점은, 대칭성을 고려하여 처음부터 반복 명령을 사용하려 노력했다는 점을 꼽을 수 있다.

그러나 S3은 치환 문자의 활용에서 조금 아쉬움을 남긴다. 특히, X와 1X가 동일하다는 점을 이해하지 못해 X 앞에 1을 반복해서 사용한 점은 피험자가 아직 치환 문자에 대한 이해가 완벽히 선행되지 않았다는 점을 드러낸다. 더불어, 마지막 실행식에서 장식물에 해당되는 'do 2Rs1X2Ts[3u]18Tds2Rs1X3Td[4u] L3TsL15s2R1X2Ts[3u] d18T2R1X2Ts3u'를 살펴보면, X에 들어갈 수 있는 실행식이 피험자가 설정한 것보다 더 있다는 점을 알 수 있다. 또한, 방향을 바꾸는 불필요한 과정이 최종 실행식에 포함되어 있기도 하다. 즉, 이는 구조화의 수준이 완벽하지 않은 것인데, 처음부터 장식물의 대칭을 고려하지 않아 반복되는 부분을 치환 문자로 지정하지 않았으며, 장식물에 대한 실행식을 쓴 뒤에 더 이상의 정제 과정을 거치지 않았음에 원인이 있음을 추측해본다. S3은 자신의 문제 해결 전략에 대해 'ABAABAABA를 치환을 사용하여 4번 곱한

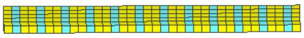
다’, ‘양 옆이 대칭이 되기 위해, 한 쪽의 모양을 복사해 방향을 돌려 반대쪽으로 붙여넣기를 했다.’ 라고 언급하기도 하였다. 이는 S3이 본 문제가 요구하는 대칭성이라는 수학적 요소를 충분히 인지하고, 활용을 위해 나름대로 노력을 했다는 점, 그리고 아주 높은 수준은 아니지만 구조화된 형태의 실행식을 작성하기 위해 수학적 창의성을 발휘했다는 점을 살펴볼 수 있다는 점에 정당성을 부여한다.

A 수준: 피험자 S18의 과정 분석

이번에 피험자 S18은 가장 높은 수준의 피험자 중 하나로, 좀 더 수준 높은 구조화와 효과적인 문제 해결 전략이 돋보인다. 이 또한 아래와 같이 제시한다.

---

① 상판 확대



begintt

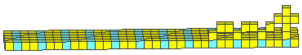
A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

do
ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAAB
AABA

endtt

---

② 구조물 올리기 시작



begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

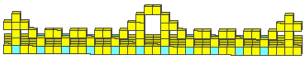
do
ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAAB
AABA
do 2Ls3u[t][u]sTdT[d]ssT[d]ssT[d]

endtt

③ 구조물 치환

begintt

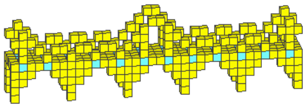
A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’
x= ‘ssT[d]’



do
ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAAB
AABA
do
2Ls3u[t][u]sTdT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]sTdT
[d]3xsTus[u][s]2d

endtt

④ 치환 하여 1차 완성



(이후 동일한 모양이

begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’
x= ‘ssT[d]’
y= ‘sTd’
z= ‘3d[d]T2us2T2s[d]su’

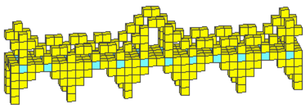
반복됨)

do
ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAAB
AABA
do
2Ls[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3
xsTus[u][s]2d]

do
4r[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3x
sTus[u][s]2d]
do t[5z4d]4l5z4d

endtt

⑤ 상판 반복 후 더욱 축소



begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’
x= ‘ssT[d]’
y= ‘sTd’
z= ‘3d[d]T2us2T2s[d]su’

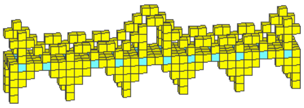
do A11 { BAA }
do BA
do
2Ls[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3
xsTus[u][s]2d]

do
4r[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3x
sTus[u][s]2d]
do t[5z4d]4l5z4d

endtt

---

⑥ 장식물의 1/4을 X로 치환 및 식 축소



begintt

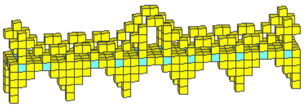
A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’
x= ‘ssT[d]’
y= ‘sTd’
z= ‘3d[d]T2us2T2s[d]su’

do A11 { BAA }
do BA
do 2LX

endtt

---

⑦ 장식물 전체 완성



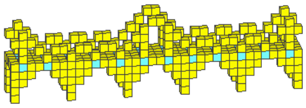
begintt

A= ‘Cs[llll]’
B= ‘cs[llll]’

X= ‘3u[t][u]sTdT[d]3 { 2sT[d] }sTus[2d]uTu’
y= ‘sTd’
z= ‘3d[d]T2us2T2s[d]su’

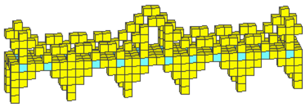
```
do A11 { BAA }
do BA
do 2Ls[X]4r[X]33s2L[X]4r[X]

endtt
```

⑧ 기둥식을 z로 잡음



```
begintt

A= 'Cs[llll]'
B= 'cs[llll]'

X= '3u[t][u]sTdT[d]3 { 2sT[d] }sTus[2d]uTu'
z= '3d[d]T2us2T2s[d]su'

do A11 { BAA }
do BA
do 2Ls[X]4r[X]33s2L[X]4r[X]
do t5z4d

endtt
```

⑨ 최종 완성



```
begintt

A= 'Cs[llll]'
B= 'cs[llll]'

X= '3u[t][u]sTdT[d]3 { 2sT[d] }sTus[2d]uTu'
z= '3d[d]T2us2T2s[d]su'

do A11 { BAA }
```

```
do BA
do 2Ls[X]4r[X]33s2L[X]4r[X]
do t[5z4d]4l[5z4d]

endtt
```

S18 피험자의 식은 4번 과정부터 최종 과정까지의 식에 따른 산출물의 결과가 모두 동일하다. 즉, 식을 축소하기 위해 수학화 과정을 여러 번 거친 것이다. 우선, S18 피험자는 바로 직전에 살펴본 S3 피험자와 마찬가지로 처음부터 계수를 거의 완벽하게 사용했다. 또한, 만들고자 하는 장식물의 일부가 확인되면, 반복을 고려해 장식물을 치환 문자로 설정하여 작업 단계의 앞부분부터 계속해서 식을 축소하려는 노력을 진행하였다. 뒷부분에서 더욱 효과적인 치환 전략이 활용되면, 앞부분의 내용을 수정하는 기지를 발휘하고, 구조에 따라 식을 나누기까지 하였다. 또한, 교수자가 공통적으로 제시한 상판 실행식을 최대한으로 축소시켰으며, 불필요한 식을 제거하기 위한 도돌이표 명령어([ ])를 적절히 활용하였다. 그리고 대칭성이라는 수학적 요소를 매우 유용하게 활용하여, 자신이 설정한 치환 문자를 방향만 바꾸어 반복해서 사용하였다. S18 피험자가 제출한 실행식은 가볍게 읽는 것만으로도 어떤 모양을 만들었는지 유추할 수 있을 만큼, 명료하게 작성되었다. 아래는 상판과 장식물, 기둥을 어떻게 만들었는지 그리고 대칭성을 어떻게 유지하였는지의 질문에 대한 S18의 답변이다.

(1) 상판은 나와 있던 식을 **복사, 붙여넣기 해서 3배**로 만들었습니다.
(2) 장식물은 끝 쪽 장식과 가운데 쪽 장식, 그 사이의 장식, 이렇게 세 가지 부분으로 나눠는데, 일단 끝 쪽 장식을 만들고, 사이의 장식은 반복되므로 치환을 사용하여 만들고, 가운데 부분을 만들고 난 다음, 같은

> 방법으로 나머지 부분을 만들고, **앞에서 한 식을 다시 한 번 사용하여** 다리의 반대쪽 부분 장식도 만들었습니다. 기둥은 **같은 모양이 반복되므로 치환을 사용**하여 다리 양 쪽에 만들었습니다.
> (3) 대칭을 유지하기 위해 **다리를 절반으로 나눈다고 생각하고,** 한 쪽 부분에 먼저 장식과 기둥을 만든 다음에, **나머지 한쪽은 먼저 만든 한 쪽을 거울에 비춘 모습을 상상**하며 만들었습니다. [13]

위의 답변으로 알 수 있듯이, S18은 식의 작성과 동시에 구조화를 진행하였기 때문에 효과적인 실행식을 작성할 수 있었다. 특히, 다양한 수학적 아이디어를 활용하기 위해 수학적 창의성이 발현되었음을 확인할 수 있으며, 이전의 피험자들과는 다르게 구조화의 정도가 대칭성을 기준으로 상당히 엄밀하게 이루어졌음을 알 수 있다. 즉, 수학화의 수준이 타 피험자에 비해 눈에 띄게 비약한다. S18 피험자는 다리의 대칭을 유지하기 위해 거울 대칭을 떠올리고, 이를 실행식으로 표현하기 위해 ‘일부 만들기 → 반복’의 과정을 계속해서 수행하였다. 이와 같은 과정을 통해 치환 구조마다 대칭을 이루는 모양을 명확히 제시할 수 있었던 것이다. 이전 수준인 S3 피험자가 반복되는 부분을 치환 문자로 바꾸고, 더 이상 시도하지 않았다는 점과 대비된다.

정리

A부터 D에 이르는 4개의 수준에 따른 피험자의 다리 만들기 과정을 분석한 결과, 계수와 치환, 대칭성, 반복적인 시도 등에서 다양한 차이를 보였다. 특히, 계수와 치환을 비롯한 실행식의 수학 언어적 측면은, 대칭성을 활용하여 구조화를 얼마나 잘 했는지가 영향을 미치는 것으로 확인되었다. 이는 앞서 결과물 분석에서 연구자와 전문가 집단이 합의한 ‘실행식 학습 환경과 문제 해결 과정에서 계수나 치환을 비롯한 기호

13) 맞춤법 정리와 강조 표시는 연구자가 하였다.

체계를 구조적으로 적절히 활용하고, 대칭성을 비롯한 수학적 요소들이 적합한 것이 수학적 창의성을 구별하는 중요 근거'라는 주장과 맥락을 함께 한다. 구조화가 잘 되었다는 것은 학습자가 수학적 창의성을 발휘하여 문제 해결을 위한 나름의 맥락을 형성했다는 것이며, 학습자의 수학화 수준이 상승했다는 점과 의미로도 해석이 가능하다. 앞서 진행한 과정 분석을 통해, 연구자는 4가지 수준을 명명해보았다. 물론, 4명의 과정 분석이 각 그룹의 비슷한 수준의 피험자들과 완벽하게 동일하지는 않겠지만, 각 피험자가 자신이 속한 그룹 이상의 수준 상승이 공통적으로 발생하지 못한다는 점과 상위 수준에 속한 학습자의 경우 아래 수준에 해당되는 개념을 유연하게 활용한다는 점에 미루어 본 연구에서 진행한 과정 분석을 정리해보고자 한다. 이는 아래의 표와 같다.

<표 V-15> 수학적 창의성에 근거한 실행식의 활용 수준 구분

피험자 수준	활용 수준
A	완전한 구조화
B	미숙한 구조화
C	유연한 문자 활용
D	제한적 문자 활용

각 수준에 따라 피험자들은 문제 해결을 시도하려는 노력 또한 차이가 났다. A 수준의 피험자는 완성된 식도 반추하여 끊임없이 수정하고, 더욱 명료한 식을 만들기 위해 대칭성을 활용하여 치환 문자를 반복해 다듬었다. 즉, 수학적 창의성을 활발히 발휘한 피험자는 과제 집착력 또한 타 피험자에 비해 두드러졌다. 수준이 아래로 내려갈수록, 오류가 생기면 포기하고 시도가 적은 모습을 찾아볼 수 있다. 이는 각 피험자의 모든 데이터와 작성 시간을 미루어 추측 가능한 내용이다.

Ⅵ. 결론

교육과정으로 번역되는 영어의 ‘커리큘럼(curriculum)’은 라틴어인 ‘쿠레레(currere)’에서 어원이 시작되었다. 쿠레레는 경마장에서 말이 달리는 길을 뜻하는 말로, 말이 정해진 노선을 달리는 것처럼 학습자 또한 배워야 할 내용이 정해져 있다는 것을 의미한다. 이러한 의미를 토대로 김승호(2016)는 교육과정이 ‘공부해 나가야 할 일련의 내용항목들’ 또는 ‘교수요목(course of study)’와 동의어가 된다고 설명하였다. 공식적 사회화 기관인 학교 교육은 사회화 과정을 통해 학습자가 그 사회가 원하고 바라는 모습으로 성장시키려고 한다. 이와 같은 의도를 반영한 국가 주도의 교육과정은 일종의 사회적 산물이라 할 수 있으며(Eggstone, 1977), 교육의 핵심적인 질문인 무엇을, 왜, 어떻게 가르쳐야 하는가에 대한 답은 교육과정에 의해 궁극적으로 제시된다(김재춘, 2002). 본고는 이와 같은 논의에서 착안하여, 연구의 시작을 OECD 역량 연구와 올해부터 적용된 2015 개정 교육과정의 총론, 그리고 수학과 교육과정에 대해 살펴보는 것으로 설정하였다. 기존의 지식 기반 교육이 역량 중심 교육으로 태세를 전환하게 되면서, 교육과정 고시 문서에서는 창의성의 가치가 더욱 분명하게 드러나게 되었다. 앞서 살펴본 이유에 따라 공식적 교육과정에는 그 교육과정을 수립한 사회의 가치가 반영될 수밖에 없는데, 총론에서 살펴본 바와 같이 교과를 막론하고 창의성이 현 시대에서 화두가 되는 교육의 쟁점 중 하나인 것은 분명하다.

학교 현장에서 수학 교과가 듣고 있는 이야기는 시간이 지나도 변화가 없는 듯하다. 수학은 위계성이 높은 학문적 특징으로 인해 부진아 양성 등을 비롯하여 많은 불만의 목소리가 존재하는 과목이다. 이와 같은 상황이 지속되는 와중에 역량 중심 교육이 대두되었고, 내용 체계에 큰 변화가 있는 것은 아니지만 교과의 성격과 목표 등에는 역량 중심, 특히

창의성과 관련된 요소가 직간접적으로 곳곳에 숨어있게 되었다. 본고는 이러한 의식을 토대로, 현실적인 맥락에서 수학적 창의성을 위한 교육을 실현하기 위한 방법을 제시하고자 하였으며, 이를 위해 수학적 창의성에 대한 여러 논지를 살펴보고, 수학화와 구성주의와의 관련성 또한 분석해 보았다. 또한, 본고에서 활용한 학습 환경인 실행식이 이와 같은 논의에 어떻게 적합한 대안이 될 수 있는지를 연구의 전반에 녹여내려 하였다. 결과적으로 학습자는 수학화 과정에서 수준을 상승시키기 위해 수학적 창의성을 필연적으로 발휘해야만 하고, 마찬가지로 실행식을 작성해나가는 과정 속에서 또한 스스로 수학적 의미를 찾으며 더 나은 구조화를 추구하기 위해 수학적 창의성을 발현시키게 된다. 이와 같은 과정을 '실행식을 통한 다리 만들기'라는 문제를 통해 살펴보았으며, 전문가 3인과 학습자의 답안에 대한 최종적인 결과물 분석을 진행하였고, 연구자는 창의적 결과물은 창의적 사고 과정에서 온다는 상식적인 논의 아래에서 과정 분석을 실시하였다. 즉, 수학적 결과물들로 가득 찬 최종 산출물을 학습자가 어떠한 맥락들을 통해 형성했는지의 과정을 중점적으로 논의하고자 하였다. 이를 위해 실행식의 변화와 그 행간에 숨어져 있는 학습자의 의도를 읽어내려는 시도를 거듭하였다.

그렇지만 산출물의 결과 분석 시, 수학 교과와 실행식 모두에 지식을 갖춘 전문가의 분석이 필요했던 탓에, 전문가 수가 적었다는 점은 연구의 한계 중 하나로 꼽힌다. 물론, 세 명의 전문가 모두 성실히 임해주어 실행식과 수학적 창의성의 관련성, 그리고 이에 대한 학습자의 답안 분석 방법에 대해 유의미한 논의를 이끌어낼 수는 있었다. 추후 연구에서 조직적이고 세밀한 FGI 적용 방법이 더욱 엄밀한 결과물을 도출할 것으로 보인다. 더불어, 온라인이라는 제한된 환경에서 연구를 진행하다 보니 학습자가 작성한 실행식의 데이터 중에서 연구자가 추측하기 어려운 아이디어를 명확하게 확인하지 못한 점 또한 한계점으로 지적된다. 본 연구의 흐름은 실행식을 기반으로 수학적 창의성을 함양시킬 수 있는 교수-학습 설계 방법과 이를 위한 문제, 그리고 답안을 분석할 수 있는 방

법으로 이어졌다. 수학적 창의성의 논지를 뚜렷하게 제시하기 위해 다양한 논의들을 흡수해보기도 하였지만, 관련된 많은 문헌과 연구에서는 공통적으로 수학적 창의성에 대한 합의된 정의가 없다는 것을 언급하고 있었다. 본고에서도 결국 이를 마찬가지로 언급하였는데, 합의된 정의가 없다는 사실이 수학적 창의성의 논지를 명확히 하는 것에는 큰 도움이 되지 못했으나, 오히려 연구의 흐름과 정당성을 확보하고 문제의 설정과 분석을 도출하는 것에 있어 다양한 시각에서 수학적 창의성을 바라보게 되는 계기가 되었다. 앞으로도 수학적 창의성과 관련된 연구들이 더욱 풍부해지기를 기대한다.

참고문헌

교육부(2015a). **교육과정 총론**. 교육부 고시 (제2015-74호). [별책 1]. 교육부.

교육부(2015b). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 (제2015-74호). [별책 8]. 교육부.

교육부(2015c). (초등학교) **수학** : [2009 개정 교육과정] **6-2**. 서울: 천재교육.

교육부(2015d). (중학교) **수학 1** : [2009 개정 교육과정]. 서울: 동아출판.

구양미, 김영수, 노선숙, 조성민(2006). 창의적 문제해결을 위한 웹기반 교수-학습 모형과 학습 환경 설계 : 수학교과에서의 예시를 중심으로. **교과교육학연구, 10**(1). 209-234.

권용덕, 장혜성(2012). 멀티미디어 자료를 활용한 지역사회중심교수가 지적장애 중학생의 대형마트 이용기술 수행에 미치는 효과. **지적장애연구, 14**(2). 225-248.

김부윤, 이지성(2005). 수학적 창의성의 평가방안에 대한 모색. **한국학교수학회논문집, 8**(3), 327-341.

김선희, 이종희(2003). 기호학 관점에서의 문자와 식 분석. **학교수학, 5**(1). 59-76.

김성준(2003). ‘초기대수’를 중심으로 한 초등대수 고찰. **수학교육학연구, 13**(3). 309-327.

김승호(2016). 교육과정 개념 모색. **교육논총, 53**(1). 1-29.

김신자(2001). 구성주의 학습환경 설계모형 연구. **교과교육학연구, 5**(2). 5-20.

김연식, 정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. **수학교육학연구, 7**(2).

김재춘(2002). 일반계 고등학교 교육과정 평가 방안. **교육과정연구, 20**(2). 97-114.

김종미, 박영태, 박호철, 정영혜, 문승환, 이정희(2010). **교육심리학**. 서울: 학지사.
김진호(2004). 수학적 창의성에 대한 일 논의 - 창의적인 사람, 창의적인 산물, 창의적인 과정이란 관점으로부터 -. **수학교육 논문집, 18**(3), 45-56.
김진호, 노선숙, 이종희, 조성민, 임창연(2003). 창의성 개발을 위한 중등수학과 단원 구성방안. **교육과학연구, 34**(1). 181-212.
김판수(2013). 수학문제 풀이과정의 수준 평가를 통한 초등학생과 영재의 창의성 비교. **과학영재교육, 5**(3), 149-161.
김판수, 김난영(2013). 문제해결 방법의 차등화를 통한 수학적 창의성 평가에 대한 소고. **한국초등수학교육학회지, 17**(3), 503-522.
김혜영, 이숙정, 유지현(2016). 대학생의 문제해결 행동이 학습성과에 미치는 영향. **학습자중심교과교육연구, 16**(3). 151-170.
김홍원, 김명숙, 송상헌(1996). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(I) - 기초 연구 편**, 한국교육개발원 연구보고 CR96-26, 한국교육개발원.
김화경(2005). 컴퓨터와 수학교육에서 환경의 설계. **수학교육학연구, 15**(4). 289-504.
도종훈(2009). 수학 문제 해결 과정에서 사고(발상)의 전환과 불변성의 인식. **수학교육, 48**(2). 183-190.
박만구(2009). 수학교육에서 창의성의 개념 및 신장 방안. **수학교육논문집, 23**(3), 803-822.
박성익, 임철일, 이재경, 최정임(2015). **교육방법의 교육공학적 이해**(5판). 서울: 교육과학사.
박성희(2009). PBL의 대안으로써의 E-PBL : 외국 사례를 중심으로. **창의력 교육연구, 9**(1). 113-130.
박영태(2002). **창의성의 별**. 서울: 학지사.
박진형(2017). 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진 사례 연구. **수학교육학연구, 27**(1). 69-88.

백남진, 온정덕(2016). **역량 기반 교육과정의 이해와 설계**. 서울: 교육아카데미.

류성림(2000). 수학적 사고력 신장을 위한 도형 영역의 교수·학습 자료 개발에 관한 연구. **과학·수학교육연구, 23**(1). 153-186.

서민규(2012). 비판적 사고와 창의적 문제해결. **교양교육연구, 6**(3), 221-247.

서보억, 신준국(2017). 수학교과에서 창의 역량 강화를 위한 학습 자료 개발. **한국창의응용학회 춘계학술대회**. 16-19.

성은현, 박병기, 김선(2003). 창의성 개념과 이론. **영재와 영재교육, 2**(1). 25-61.

성창근, 박성선. (2012). 수학적 창의성 계발을 위한 과제와 수업 방향 탐색. **한국초등수학교육학회지, 16**(2), 253-267.

송명자(2012). **발달심리학**. 서울: 학지사.

신만수, 김인수(2004). 중학교 수학에서 문자와 식 단원의 학습지도. **과학교육연구지, 28**(1). 157-167.

우정호, 홍진곤(1999). 반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도. **수학교육학연구, 9**(2). 383-404.

우정호(2007). **학교수학의 교육적 기초**(증보판 2판). 서울: 서울대학교 출판부.

우정호(2011). **수학 학습-지도 원리와 방법**(제2개정판 수정판). 서울: 서울대학교 출판문화원.

유윤재. (2009). 수학적 창의성. **과학영재교육, 1**(3), 59-71.

이강섭, 황동주(2007). 수학 영재학생과 일반학생의 수학 창의성과 문제설정과의 상관 연구. **수학교육, 46**(4), 503-519.

이경화(2015). **수학적 창의성**. 서울: 경문사.

이경화(2016). 현실적 수학교육 이론의 재음미 - 수학적 창의성 교육의 관점에서. **수학교육학연구, 26**(1), 47-62.

이대현, 박배훈(1998). 수학적 창의력에 대한 소고. **수학교육학연구, 8**(2).

679-690.
이대현(2012). 수학적 창의성의 요소와 창의성 개발을 위한 수업 모델 탐색. **한국초등수학교육학회지, 16**(1), 39-61.
이선영(2014). 영재성과 창의성 개념 간의 관계를 통해서 본 영재성과 창의성 : 동질적인 개념인가? 이질적인 개념인가?. **영재와 영재교육, 13**(1). 107-127.
장정아(2005). **온라인 문제기반학습 설계모형 개발 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
장혜원, 강종표(2009). 쌓기나무 지도를 위한 부분제거법의 적용. **수학교육학연구, 19**(3). 425-441.
장혜원(2015). 2학년 쌓기나무 수업에서의 수학적 의사소통 분석. **학교수학, 17**(2). 223-239.
정영옥(2017). 초등학교 수학에서 공간 방향에 대한 교육과정과 교과서 비교. **학교수학, 19**(4). 663-690.
정치봉(2009). 수학적 창의성과 직관. **제 14회 국제수학영재교육 세미나 프로시딩**. 11-20.
조석희, 황동주(2007). 중학교 수학 영재 판별을 위한 수학 창의적 문제해결력 검사 개발. **영재교육연구, 17**(1). 1-26.
조아라, 조한혁(2017). 실행식 기반 쌓기나무 학습의 평가 및 지도 방안 연구. **학습자중심교과교육연구, 17**(18). 513-536.
조연순, 체제숙, 백은주, 임현화(2004). 초등학교 수업을 위한 문제중심학습(PBL)의 교수학습 과정 모형 연구. **교육방법연구, 16**(2). 1-28.
조한혁, 송민호(2014). 실행식(Executable expression) 기반 SMART 스토리텔링 수학교육. **수학교육학연구, 24**(2), 269-283.
진선미, 여현숙(2014). 21세기 학습자의 핵심역량 제고를 위한 교육방법: e-PBL의 가능성 탐색 연구. **학습자중심교과교육연구, 14**(4). 331-363.
최경숙, 백석윤(2004). 공간 감각 관련 지도 내용 계열 분석. **한국초등수학교육학회지, 8**(1). 63-87.

최명숙(2001). 구성주의에 대한 교사들의 인식과 수업에의 적용사례. **교육정보미디어연구, 7**(1), 5-28.

최병훈, 방정숙(2012). 수학적 창의성 교육에 관한 연구 동향 분석. **영재교육연구, 22**(1). 197-215.

한국과학창의재단(2009a). **창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구**. 2009_R1.

한국과학창의재단(2009b). **창의적 수학·과학인재 육성을 위한 고등수학 교육 연구: 인지과학적 조망**. 한국과학창의재단.

한국과학창의재단(2010). **창의 중심의 수학 수업 내실화 및 평가 방안 연구**. 2010_R1.

한국교육개발원(2016). **OECD 교육 2030: 미래 교육과 역량을 위한 현황분석과 향후과제**. 현안보고 OR 2016-10.

한국교육과정평가원(2010). **창의성 제고를 위한 교육과정 개편 방안 연구**. 연구보고 RRC 2010-3

한국교육과정평가원(2012). **2012년도 KICE 전공실 페이퍼**. 연구자료 ORM 2012-122.

황우형, 최계현, 김경미, 이명희(2006). 수학교육과 수학적 창의성. **수학교육논문집, 20**(4), 561-574.

허난, 강옥기(2010). 수학과 문제중심학습(PBL)을 위한 문제분석기준 개발과 학습모형 연구. **수학교육연구, 20**(3). 255-274.

Baroody, A., & Coslisk, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach in K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Becker, J. P., & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Cropley, A. J. (1999). Definitions of creativity. *Encylopedia of creativity, 1,* 511-524.

Eggleston, J. (1977). *The sociology of the school curriculum*. London: RKP.

Ertmer, P. A. , & Simons, K. D. (2006). Jumping the PBL Implementation Hurdle: Supporting the Efforts of K-12 Teachers. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning, 1*(1).

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (ED.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ferdinand de Saussure. (1916). *Cours de Linguistique Generale*. 김현권 역 (2008). **일반언어학 강의**. 서울: 지식을 만드는 지식.

Freudental, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherland: Reidel.

Freudental, H. (1991). Revisiting mathematics education. 우정호, 정은식, 박교식, 유현주, 정영옥, 이경화 역(2008). **프로이덴탈의 수학교육론**. 서울: 경문사.

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. McGraw-Hill: New York.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren, *Education Studies in Mathematics, 18*, 59-74.

Jonassen, Daivd H. (2006). *Modeling with technology: Mindtools for conceptual change* (3rd Edition). Pearson Education.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1981). *'Algebra'*, in K. Hard (Ed)., Childeren's Understanding of Mathematics, 11-16, Murray, London, 102-119.

Lambros, A. (2002). *Enerziging teacher education and professional development with problem-based learning*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Leikin, R. (2009). *Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks*. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 129-145). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Mann, E. L. (2006). *Creativity: The essence of mathematics. Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.

Mayer, Richard E. (2011). *Applying the science of learning*. Pearson Education.

Malopinsky, L., Kirkley, J. R., Stein, R., & Duffy, T. (2000). *An instuctional design model for online problem based learing (PBL) environments: The Learning to Teach with Technology Studio*. Proceedings of the Association for Educational Communications and Technology.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Noss, R., & Holyes, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). London: Kluwer academic publishers.

OECD (2003). *Definition and selection of competencies : Theoretical and conceptual foundation(DeSeCo).* OECD Press.

OECD (2005). *The Definition and Selecion of Key Competencies.* OECD.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.

Robert Scott, Root-Berstein., & Michèle, Root-Berstein. (2001). S*parks of genius : the thirteen thinking tolls of the world's most creativie people*. 박종성 역(2007). **생각의 탄생**. 서울: 에코의 서재.

Roodhardt, A., Kindt, M., Burrill, G., & Spence, M. (1997). *P*atterns and symbols. In National Center for Research in Mathematical Sciences

Education & Freudenthal Institute(Eds.), *Mathematics in context*. Chicago: Encyclopaedia Britannica Educational Corporation.

Savery, J. R., & Duffy, T. M. (1996). P*roblem-based learning : An instuctional model and its constructivist framework. Educational Technology, 35*(5), 31-38.

Sheffield, L. (2006). Developing mathematical creativity-Questions may be the answer. *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, 87-100.

Sigrid Wagner. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(2), 107-118.

Sriraman, B. (2004). The Characteristics of Mthematical Creativity. *The Mathematical Educator, 14*(1). 19-34.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms. The Journal of Secondary Gifted Education, 17, 20-36.

Torrence, E. P. (1972). Can we teach children to think creatively? *Journal of Creative Behavior, 9*, 12-195.

Treffinger, D. T., Isaksen, S. G., & Dorval, K. b. (2003). *Creative problem solving: an Introduction*. 김영채 역(2004). **CPS: 창의적문제해결**. 서울: 박영사.

Tyler, R. W. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction*. Chicago: University of Chicago Press.

<부록 1> 연구에 제시된 문제

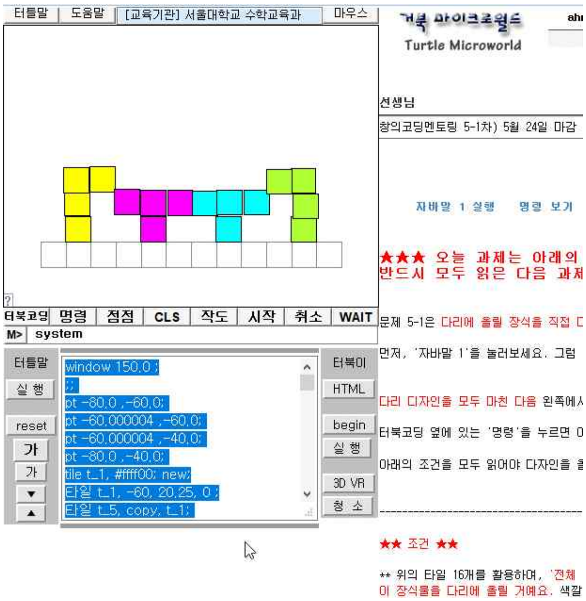
□ 1단계

다리에 올릴 장식을 직접 디자인해보는 과정입니다.
먼저, '자바말 1'을 눌러보세요. 그럼 타일이 뜹니다. 이 타일을 활용해 다리를 디자인하세요.
다리 디자인을 모두 마친 다음 왼쪽에서 '코딩수학'을 눌러서 '터북코딩'으로 바뀐 것을 확인해요.
'터북코딩' 옆에 있는 '명령'을 누르면 아래쪽에 명령문이 출력됩니다.
아래의 조건을 모두 읽어야 다자인을 올바르게 할 수 있습니다.

★조건
** 위의 타일 16개를 활용하여, '대칭'이 되는 다리 장식물을 만드세요.
다리의 가운데를 중심으로 왼쪽, 오른쪽이 서로 대칭이어야 해요.
이 장식물을 다리에 올릴 거예요. 색깔 타일 아래에 있는 하얀색 막대기가 다리의 상판이 됩니다.
** 하나의 색깔에서 4개의 타일을 사용할 수 있습니다. 즉, 하나의 모양은 4개의 타일로 이루어져야 합니다.
** 처음에 지정된 4개의 타일(노랑, 분홍, 하늘, 연두)은 움직이지 말고, 위에 있는 타일만 움직여서 만드세요.
** 같은 색끼리만 묶어서 만들 수 있습니다.
** 선생님이 지난 시간에 쌓기나무 4개로 만들 수 있는 구조물을 모두 만들라고 했습니다. 그걸 떠올리면 좋은 디자인을 만들 수 있을 겁니다.
** 3가지 디자인의 모양은 서로 모두 달라야 합니다. 중복해서 만들지 마세요.

** 총 디자인해야 할 개수는 3개입니다.

** '자바말 2'를 눌러 선생님이 만든 예시를 참고하세요.



□ 2단계

이번 과제는 여러분이 타일로 디자인한 장식물을 직접 다리 상판에 넣어보는 과정입니다. 선생님이 만든 다리 상판 코딩식을 '복사-붙여넣기' 하고, 그 위에 자신이 만든 장식물을 올려보세요.

** 다리 상판 코딩식

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do ABAABAABAABA ll

endtt
```

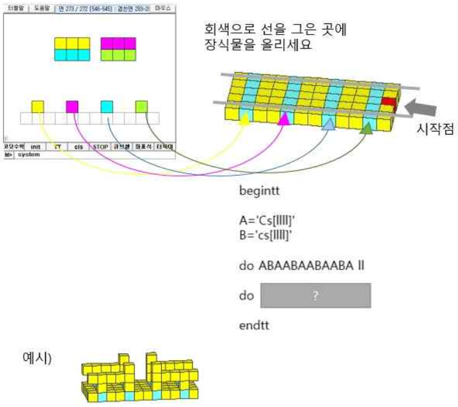
---

endtt 바로 위에 do로 시작하는 장식물을 만드는 코딩식을 쓰세요.

설명)

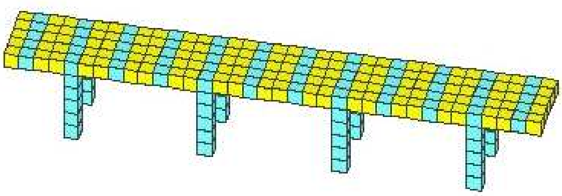
- 1단계의 타일에 고정된 쌓기나무가 있었습니다. 하늘색 쌓기나무가 1단계에 있던 고정된 쌓기나무 자리입니다.
- 현재 다리의 가로는 12입니다. 여러분이 디자인한 것과 길이가 같습니다. 참고하세요.
- 다리 양쪽에 모두 만드세요.
- 빨간색 쌓기나무가 장식물을 올리는 시작 지점입니다.

- 자신이 디자인한 모양 3개를 각각 만드는 거예요. 즉, 모양이 다른 다리 3개가 나와야 합니다.



□ 3단계

문제 3은 문제 2에서 만든 다리를 3배로 확장시키고, 다리를 만드는 것입니다. 문제 2번에 있던 다리 명령어를 활용하여, 여러분만의 다리를 만드세요. 하나만 만들면 됩니다! 단, 기둥은 반드시 있어야 해요.

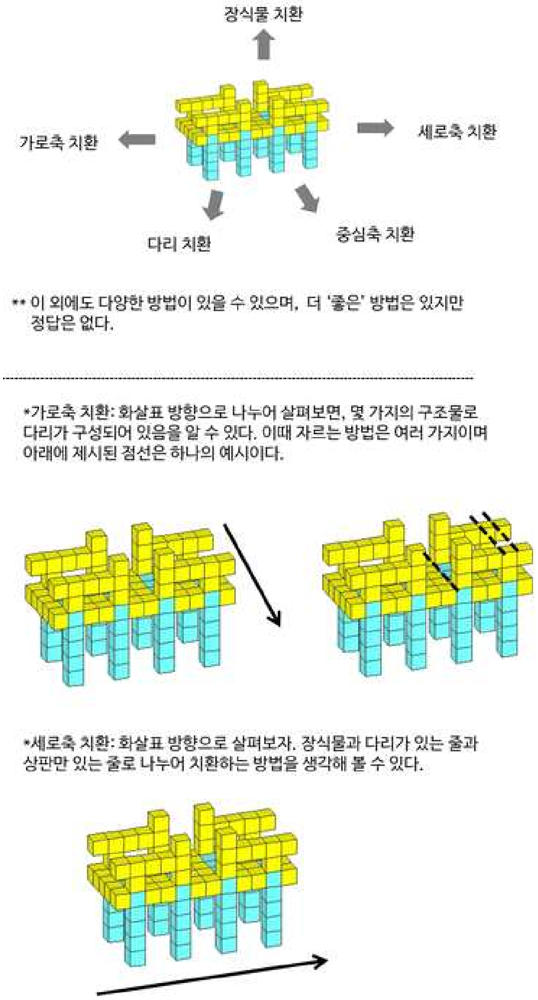


- 이전 다리는 길이가 12였지만, 아래에 있는 명령어는 길이가 36인 다리입니다.
- 앞서 만든 장식물 대신 다른 장식물을 만들어도 좋습니다. 단, 장식물은 반드시 '쌓기나무 4개'로만 만들어야 합니다.
- 전체 대칭은 반드시 유지해야 합니다.

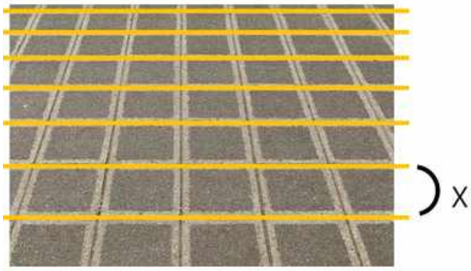
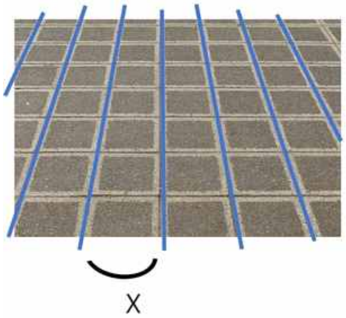
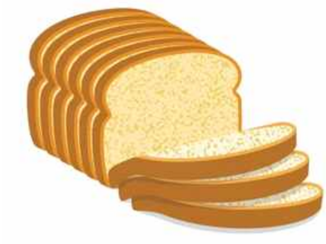
□ 4단계

준비)

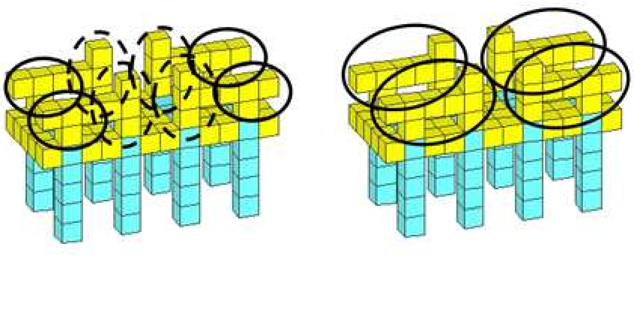
선생님이 지난 시간에 보여준 길이가 12인 다리입니다.
이것을 치환하는 방법에는 여러 가지가 있지만, 선생님은 그 중에서 5개를 제시하도록 할게요.



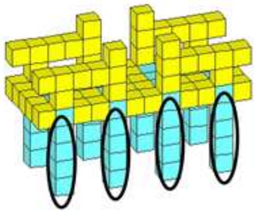
** 아래의 사진도 참고해보세요!

가로 치환	세로 치환
 	 

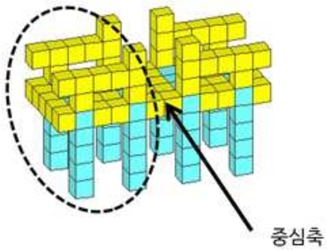
*장식물 치환: 장식물은 대칭구조 이기 때문에 반복된다.
장식물을 하나하나 치환할 수도 있고, 묶어서 치환할 수도 있다.



*다리 치환: 다리가 앞, 뒤 모두 반복되기 때문에 다리를 치환할 수도 있다.
앞서 살펴본 가로축 치환에 다리 치환을 더할 수도 있다.



*중심축 치환: 구조물이 가운데를 중심으로 대칭이기 때문에,
한 쪽만 만들고 다른 한 쪽을 반복하는 방법을 사용할 수도 있다.



'자바말 2'는 '다리 치환' 및 '구조물 치환' 전략을 사용한 다른 친구의 작품입니다.
친구의 실행식을 어떻게 고치면 더욱 알아보기 좋은 실행식이 될까요?
자신의 실행식과도 비교해봅시다.

'자바말 3'은 '가로축 치환', '다리 치환'과 '구조물 치환' 전략을 사용한 다른 친구의 작품입니다.
친구의 실행식을 어떻게 고치면 더욱 알아보기 좋은 실행식이 될까요?
자신의 실행식과도 비교해봅시다.

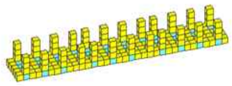
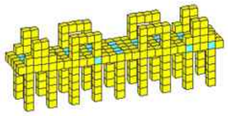
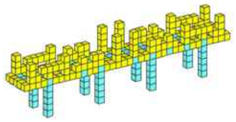
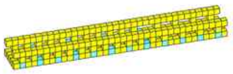
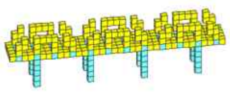
문제)

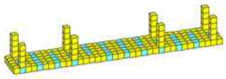
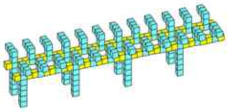
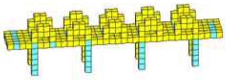
문제 1. 3단계에서 다리를 어떻게 만들었나요?
(1) 상판을 어떻게 늘렸는지, (2) 장식물과 기둥을 어떻게 만들었는지,
(3) 대칭을 유지하기 위해 어떻게 했는지를 번호를 달아 최대한 자세히 쓰세요.

문제 2. 이번에 배운 점을 참고하여, 자신이 작성한 3단계의 실행식(코딩식)을 압축시켜 짧게 만들어 보세요. 혹시 틀린 부분이 있다면, 이번에 고쳐서 작성하면 됩니다(자바말 1에 작성).

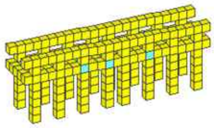
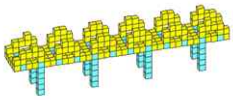
<부록 2>

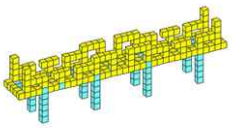
피험자 최종 제출 답안(전문가 집단에 배포된 피험자 자료)

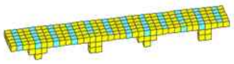
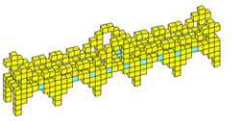
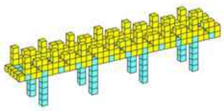
이름	그림	실행식
S1		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' do ABAABAABAABA II tRTs3uRTTs[2d]TTs[2d]TTs[2d]R3Ts[2d]RTTs[2d]TTs[2d]TTsddR4TLdABAABAABAABA II tRTs3uRTTs[2d]TTs[2d]TTs[2d]R3Ts[2d]RTTs[2d]TTs[2d]TTsddR4TLdABAABAABAABA II tRTs3uRTTs[2d]TTs[2d]TTs[2d]R3Ts[2d]RTTs[2d]TTs[2d]TTs[2d] endtt
S2		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' do ABAABAABAABAABAABAABAABA do 2Rs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRsus2us2dsd3s3u3s3d6s3u3s3d3sus2us2dsdsR4sRsus2us2dsd3s3u3 s3d6s3u3s3d3sus2us2ds endtt
S3		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' X='[3u]s[u]2s2u2R[s]2R3s[u]2d2sus[u]2susd' do 4{AB2AB[5d]L4s[5d]2R4sL2ABA} do 2Rs1X2Ts[3u]18Tds2Rs1X3Td[4u]L3TsL15s2R1X2Ts[3u]d18T2R1X2Ts3u endtt
S4		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' do ABAABAABAABA do ABAABAABAABA do ABAABAABAABA do 4LRRsuuTuTuT[3d]d3s[3d]TuTdTdd do 2{4R2TsuTuTuT[3d]d3s[3d]TuTdTdd} do RTTTs3LuTuTuT[3d]dsss[3d]TuTdTdd do 2{4R2TsuTuTuT[3d]dsss[3d]TuTdTdd} endtt
S5		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' W='TTs' O='ussd' do ABAABAABAABA ABAABAABAABA ABAABAABAABA do LLTu3W3L3Ts3L3WTuLL11sL3TsL11sLL11ssd11OusR3TsRsd10Ouss endtt
S6		begintt A='Cs[4l]' B='cs[4l]' do ABAABAABAABA 2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR4TRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR4sLAB

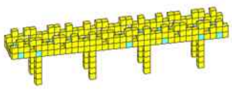
		AABAABAABA 2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR4TRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR4sLAB AABAABAABA 2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR4TRsuusuTsdduusssddTTsuLLsuRRdsdTdR4sLL4 sL4sc5d5uL4T5d5uR9T5d5u9T5d5u9T5d5uR4T5d5uR9T5d5u9T5d5u endtt
S7		begintt A='Cs[llll]' B='cs[llll]' do ABAABAABAABA ABAABAABAABA ABAABAABAABA do 2Ls[4u]R4s[4u]L9s[4u]L4s[4u]R15s[4u]R4s[4u]L9s[4u]L4s4u endtt
S8		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' a='[5d]' b='2u[2l]2d' do ABabAABbAABbAABabA IIABbAABbAABabAABbA IIABbAABabAABbAABbA IITR4TR ABbAABbAABabAABbA IIABbAABabAABbAABbA IIABabAABbAABbAABabA II endtt
S9		begintt A='Cs[llll]' B='cs[llll]' do

		ABAABddddduuuuuAABAABAABddddduuuuuAABAABAABddddduuuuuAABAABAABddddduuuuu AABAlllltttddddduuuuutttttttttddddduuuuutttttttttddddduuuuutttttttttddddduuuuuuusdsddsss uususdsddsssuususdsddsssuususdsddsssuususdsddrrrruututdtddtttuututdtddtttuututdtddtttuu tutdtddtttuututdtdd endtt
S10		begintt A='Cs[llll]' B='cs[llll]' C='R2sL' X='[4u]2susudsdsusudsd2s[4u]' Y='usudsd2s2u[s][2Ls]2d3s2u[s][2Ls]2d2susudsd' Z='3ud[s]2d3s[4u]3s[4u]3s2u[2Ls]u3d' do ABAABAABAABA llCABAABAABAABA llCABAABAABAABA ll do R2sRsX2sY2sZsR4sR35s2RsX2sY2sZ endtt
S11		begintt A='RRRRsR4scLsL4sCRsR4sLsL4scRs[4d]R4s[4d]' B='CLsL4sRsR4scLsL4sCRsR4s' C='RR4TR' D='u[u]sssusudsdsss[u]d2T' do ABCABCABCABC RR3T DDD do RRTTR4TL DDD do D endtt

S12		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' H='dddduuuuu' P='llRRRssLsuusRRssRRsddsssuusRRssRRsddsssuusRRssRRsddsssuusRRssRRsddLssssLuus RRssRRsddsssuusRRssRRsddsssuusRRssRRsddsssuusRRssRRsdd' do ABAABAABAABA PABAABAABAABA PHRRsssHsssHsssHssHsssHsssHsssHRssssHRsssHsssHsssHssHsssHsssHsssH endtt
S13		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' X='[5d]L[4s5d]R' C='2Tsususdsd' D='2Tsus[u]2sds' E='su2s[u]sd' do AB2ABX2AB2AB2ABX2AB2AB2ABX2AB2AB2ABX2ABA do 2RuE4CDRd4suRE4CD endtt
S14		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' C='2usuTs[s]3d' D='3utsTsds2d' do ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABA ll

		do 2R[2lsC3sC3sC3sD3sD3sD]2rsC3sC3sC3sD3sD3sD endtt
S15		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' X='c2R31T2R5d5uL4s5d5uR9s5d5uR4s5d5u' D='3s3u3s3d' E='AAB' F='3s3d5D' G='5d5u' do_2 AB11EA do XL9s2RG3L4sGR9sGR4sG do_2 R30s3u2RFsL4sLs3uF endtt
S16		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' X = '[5d][L4s5d]' do ABAABXAABA ABAABXAABA ABAABXAABA ABAABXAABA F = '2u3s[2u]2d' Z= '[2ut2s]' Y= '3u3sd[d]3s2d' do 2L19s [Y 3s Z 3s F] do R 4s L [Y 3s Z 3s F] do 2L3s [Y 3s Z 3s F] do R 4s L [Y 3s Z 3s F] endtt

S17		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' do 3{ABAABAABAABA} X='[2dtu]' Y='dsdusu' C='[2dsu]' Z='dtdutu' do 2R4sX8sY7sC9sY4rZ8tX8tZ8tX endtt
S18		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' X='3u[t][u]sTdT[d]3 { 2sT[d] }sTus[2d]uTu ' z='3d[d]T2us2T2s[d]su' do A11 { BAA } do BA do 2Ls[X]4r[X]33s2L[X]4r[X] do t[5z4d]4l[5z4d] endtt
S19		begintt A='Cs[IIII]' B='cs[IIII]' D='c[5d]' E='Cs[IIII]Cs[IIII]cs[IIII]' F='c4lc[5d]' G='c4r' H='s[2u]sTusds' I='2susTs[u]d[t]' J='Cs[IIII]Cs[IIII]cs[IIII]Cs[IIII]Cs[IIII]cs[IIII]Cs[IIII]Cs[IIII]cs[IIII]c[5d]c4lc[5d]c4r'

		do AB[EDFG3JDFGEA] do Cu[2u]sTusds6HL3TsLsusTs[u]d[t]6I endtt
S20		begintt A='Cs[I I I I]' B='cs[I I I I]' x='us[u]sTusd3susT ds[u]sd' z='[5d]9t' y='[5d]9s' do 3{AB2AB2AB2ABA} do 4t3z[5d]t4ls3y[5d]31t4rxTxTx4l35txTxTx endtt

<부록 3>

전문가 집단의 합의에 의한 수학적 창의성 수준 최종 합산

피험자	갑	을	병	해당 수준
S1	1	2	1	C
S2	1	2	2	C
S3	3	4	3	B
S4	2	3	2	C
S5	2	1	2	D
S6	1	3	1	D
S7	1	1	2	D
S8	2	2	3	C
S9	1	1	1	D
S10	4	3	3	B
S11	2	3	4	B
S12	1	2	1	C
S13	4	3	4	B
S14	3	3	2	B
S15	3	4	4	B
S16	4	4	4	A
S17	2	3	3	B
S18	4	4	4	A
S19	2	4	2	A
S20	4	4	3	A

<부록 4>

과정 분석 피험자의 실행식 전체 데이터

(1) S6 피험자

자리 잡고 장식물 올림

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do  ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA  llr

endtt
```

장식물을 위, 아래로 올림(2/3까지)

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do  ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTsu
LLsuRRdsdTdR4sL

endtt
```

장식물을 위, 아래로 올리는 것까지 완성

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do  ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sL

endtt
```

기둥 하나 만듦

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do  ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLL4sL4sc5d

endtt
```

기둥 만들기 완성

begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLL4sL4sc5d5uL4T5d5uR9T5d5u9T5d5u9T5d5uR4T5d5u
R9T5d5u9T5d5u

endtt

실행식 줄이기 시작

begintt

A='Cs[4ㅣ]'
B='cs[4ㅣ]'

do ABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
llrrRRLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLL4sL4sc5d5uL4T5d5uR9T5d5u9T5d5u9T5d5uR4T5d5u

R9T5d5u9T5d5u

endtt

계수 활용하여 줄이기

begintt

A='Cs[4l]'
B='cs[4l]'

do ABAABAABAABA
2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdRTTTTRsuusuTsdduusssddTTs
uLLsuRRdsdTdR4sLL4sL4sc5d5uL4T5d5uR9T5d5u9T5d5u9T5d5uR4T5d5u
R9T5d5u9T5d5u

endtt

최종 제출

begintt

A='Cs[4l]'
B='cs[4l]'

do ABAABAABAABA
2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR4TRsuusuTsdduusssddTTsuL
LsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR4TRsuusuTsdduusssddTTsuL

```
LsuRRdsdTdR4sLABAABAABAABA
2l2r2RLRTuusuTsddTTsuuLLssRRssTsdsdTdR4TRsuusuTsdduusssddTTsuL
LsuRRdsdTdR4sLL4sL4sc5d5uL4T5d5uR9T5d5u9T5d5u9T5d5uR4T5d5uR9
T5d5u9T5d5u

endtt
```

(2) S2 피험자

기둥 만들기(계수까지만 사용)

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do ABAABAABAABAABAABAABAABA

do RRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]
```

기둥 만들기 완성

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do ABAABAABAABAABAABAABAABA

do
RRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRs[5d]3s[5d]3s[
5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]
```

endtt

장식물 한 쪽 완성

begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABA

do
RRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRsus2us2dsd3s3u3s3d6s3u3s3d3sus2us2ds
endtt

장식물까지 최종 완성

begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABA

do
RRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRs[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]3s[5d]sR4sRsus2us2dsd3s3u3s3d6s3u3s3d3sus2us2dsdsR4sRsus2us2dsd3s3u3s3d6s3u3s3d3sus2us2ds
endtt

(3) S3 피험자

상판 확대 시도(오류)

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do 5 {ABAABAABAABA ll}


endtt
```

파트 완성

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do  ABAAB[5d]L4s[5d]2R4sLAABA
endtt
```

파트 반복

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do  4{ABAAB[5d]L4s[5d]2R4sLAABA}
endtt
```

장식물을 위, 아래로 만들었지만 오류

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do  4{ABAAB[5d]L4s[5d]2R4sLAABA}

do  2RR2TuRs[2u]2Tsususdsd2Ts[2u]sR3TsRs[2u]2Tsususdsd2Ts2u2ds

endtt
```

장식물을 치환하고 하나 올려봄

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

X='2Rs[3u]s[u]2s2u2R[s]2R3s[u]2d2sus[u]2susd2Ts3u'
do  4{AB2AB[5d]L4s[5d]2R4sL2ABA}
do 1X

endtt
```

장식물 모두 올리고 최종 완성

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
```

X='[3u]s[u]2s2u2R[s]2R3s[u]2d2sus[u]2susd'

do 4{AB2AB[5d]L4s[5d]2R4sL2ABA}
do 2Rs1X2Ts[3u]18Tds2Rs1X3Td[4u] L3TsL15s2R1X2Ts[3u]
d18T2R1X2Ts3u

endtt

(4) S18 피험자

상판 확대

begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABA

endtt

구조물 올리기 시작

begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABA
do 2Ls3u[t][u]sTdT[d]ssT[d]ssT[d]

endtt

구조물 치환

begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
x='ssT[d]'

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABA
do 2Ls3u[t][u]sTdT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]sTdT[d]3xsTus[u][s]2d

endtt

치환하여 1차 완성

begintt

A='Cs[llll]'
x='ssT[d]'
y='sTd'
z='3d[d]T2us2T2s[d]su'

do ABAABAABAABAABAABAABAABAABAABAABA
do 2Ls[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3xsTus[u][s]2d]
do 4r[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3xsTus[u][s]2d]
do t[5z4d]4l5z4d

endtt

상판 반복되는 것 치환

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
x='ssT[d]'
y='sTd'
z='3d[d]T2us2T2s[d]su'

do A10 { BAA }BA
do  2Ls[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3xsTus[u][s]2d]
do  4r[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3xsTus[u][s]2d]
do t[5z4d]4l5z4d

endtt
```

상판 반복 후 더욱 축소

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
x='ssT[d]'
y='sTd'
z='3d[d]T2us2T2s[d]su'

do A11 { BAA }
do BA
do  2Ls[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3xsTus[u][s]2d]
do  4r[3u[t][u]yT[d]3xsTuTu[3d]TusTdd[2d]yT[d]3xsTus[u][s]2d]
do t[5z4d]4l5z4d

endtt
```

장식물 1/4 파트 X로 치환(식 단순화까지 함께 진행)

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
X='3u[t][u]sTdT[d]3 { 2sT[d] }sTus[2d]uTu   '
y='sTd'
z='3d[d]T2us2T2s[d]su'

do A11 { BAA }
do BA
do 2LX

endtt
```

장식물 전체 완성

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
X='3u[t][u]sTdT[d]3 { 2sT[d] }sTus[2d]uTu   '
y='sTd'
z='3d[d]T2us2T2s[d]su'

do A11 { BAA }
do BA
do 2Ls[X]4r[X]33s2L[X]4r[X]


endtt
```

다리 시작(z로 미리 잡고 시작)

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
X='3u[t][u]sTdT[d]3 { 2sT[d] }sTus[2d]uTu    '
z='3d[d]T2us2T2s[d]su'

do A11 { BAA }
do BA
do 2Ls[X]4r[X]33s2L[X]4r[X]
do t5z4d


endtt
```

최종 완성

```
begintt

A='Cs[llll]'
B='cs[llll]'
X='3u[t][u]sTdT[d]3 { 2sT[d] }sTus[2d]uTu    '
z='3d[d]T2us2T2s[d]su'

do A11 { BAA }
do BA
do 2Ls[X]4r[X]33s2L[X]4r[X]
do t[5z4d]4l[5z4d]


endtt
```

Abstract

Cho, Ah Ra
Department of mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

In the existing knowledge-based education, the direction of school education is shifting to competency-centered education that can better explain the education and the life overall. Among the various competencies, the revised curriculum overview and mathematics curriculum documents refer to creativity in common. Creativity is perceived as a competence to be equipped in modern and future society. This article discusses the mathematical creativity that mathematics and curriculum emphasized in the past several revisions. ased on various researches related to mathematical creativity, this article starts from the argument that mathematical creativity is needed to raise the level in the mathematization process. Also, we present an executable expression as a learning environment for this reason.

Therefore, we examine the executable expression, its mathematical implications, mathematics creativity, mathematization and the constructivism that is the center of the e-PBL, which is the teaching-learning design method that we want to take in the paper. Furthermore, we organically linked the research to the justification and

methodology. After that, we presented the teaching - learning design method suitable for the learning environment based executable expression. To applicate, we analyzed the learner 's data on the problem that is 'Create a bridge that utilizes symmetry'. In particular, the results were analyzed based on the opinions of the three experts in order to establish analytical criteria that reflect both mathematical creativity and executable expression. From this objective analysis, based on the argument that creative outcomes are accompanied by creative thought processes, we conducted a process analysis by tracking the final submission of executable expression and transfer process to analyze the learners' thinking process. Through this, the moments when mathematical creativity emerged in the process of pursuing mathematical meaning naturally were captured. In other words, we focused on the process of how learners formed the final output filled with mathematical results through the contexts.

Keywords: Executable express, Mathematical creativity, Mathematization, Mathematical meaning, Mathematical thinking process, Constructionism, e-PBL, Process analysis, Results analysis.

Student Number: 2016-21571